

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014**Prof. Dr. J. Schmalian****Blatt 7****Dr. P. P. Orth****Abgabe und Besprechung 13.12.2013****1. Taylorentwicklung I**

(5 + 5 + 5 + 10 = 25 Punkte)

Berechnen Sie für alle folgenden Funktionen explizit die ersten vier nicht verschwindenden Terme der Taylorreihe um den Punkt $x = 0$, und finden Sie anhand Ihres Ergebnisses den allgemeinen Ausdruck der Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ bis zur Ordnung N um den Punkt $x = a$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (1)$$

Es werden Terme der Ordnung $\mathcal{O}((x-a)^{N+1})$ und höher vernachlässigt. Im folgenden entwickeln wir um den Punkt $a = 0$. Dafür müssen wir einfach die n -ten Ableitungen der Funktionen am Punkt $x = 0$ bestimmen, da diese den n -ten Koeffizienten a_n der Taylorreihe bestimmen.

(a)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9) \Rightarrow \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8) \Rightarrow \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \quad (3)$$

(b)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5) \Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \quad (5)$$

Auf diese Weise kann man auch die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ erhalten.

(c) $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$. Zeigen Sie dass man die Reihe sowohl erhalten kann durch Bilden der Ableitungen von $\tan(x)$ als auch durch Division der in Aufgabe 1 erhaltenen Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \mathcal{O}(x^9). \quad (6)$$

Wenn wir die beiden Reihenausdrücke für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durcheinander dividieren, können wir zuerst einmal erkennen, dass es nur ungerade Potenzen von x in der Reihe geben wird, da $\sin(x)$ nur ungerade Potenzen von x enthält. Ausserdem

können wir folgendes rekursive Schema der Taylorkoeffizienten erkennen

$$a_1 = 1 \quad (7)$$

$$a_3 = -\frac{1}{3!} + \frac{a_1}{2!} = \frac{1}{6} \quad (8)$$

$$a_5 = \frac{1}{5!} - \frac{a_1}{4!} + \frac{a_3}{2!} = \frac{2}{15} \quad (9)$$

$$a_7 = -\frac{1}{7!} + \frac{a_1}{6!} - \frac{a_3}{4!} + \frac{a_5}{2!} = \frac{17}{315} \quad (10)$$

$$a_9 = \frac{1}{9!} - \frac{a_1}{8!} + \frac{a_3}{6!} - \frac{a_5}{4!} + \frac{a_7}{2!} = \frac{62}{2835}, \quad (11)$$

usw.. Der n -te Taylorkoeffizient kann also rekursiv definiert werden als

$$a_{2n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{(2n+1)!} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{[2(n-\nu)]!} a_{2\nu+1} \right). \quad (12)$$

(d) Die erste Funktion ergibt eine geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4) \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \quad (13)$$

Für die nächsten beiden Funktionen erhalten wir

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4) \quad (14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4). \quad (15)$$

Allgemein erhalten wir durch Bilden der Ableitungen den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} (1+x)^p &= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + \dots \\ &= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p!}{n!(p-n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n. \quad (17)$$

2. Taylorentwicklung II

(10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktionen in den Aufgabenteilen (a) und (b) jeweils die ersten drei nicht verschwindenden Terme der Taylorentwicklung um den Punkt $x = 0$.

(a) Wir finden die Taylorentwicklung (oder Potenzreihenentwicklung) der Funktionen, indem wir den Integranden entwickeln, dann Summation und Integration vertauschen (das ist erlaubt im Konvergenzbereich der Potenzreihe) und die einzelnen Terme integrieren

$$\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x dt \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x dt t^{2n} \quad (18)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \quad (19)$$

$$\begin{aligned}\sin^{-1}(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \int_0^x dt t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots\end{aligned}\quad (20)$$

- (b) Wir berechnen die Taylorreihen der Funktion indem wir erst den $\cos(x)$ entwickeln und die Potenzreihe dann mit Hilfe der Reihe von $(1+x)^p$, die wir in Aufgabenteil 2(d) erhalten haben, weiter entwickeln:

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(x)}} = \left(1 - \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots}_{=y}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{3y^2}{8} \mp \dots \quad (21)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{7x^4}{96} + \mathcal{O}(x^6). \quad (22)$$

Wir erhalten die Potenzreihe der Funktion, indem wir beide Faktoren in eine Potenzreihe entwickeln und die beiden Reihen dann multiplizieren. Das ist erlaubt für konvergente Potenzreihen.

$$\frac{e^x}{1-x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right) \left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right) \quad (23)$$

$$= 1 + 2x + \frac{5x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3). \quad (24)$$

- (c) Berechnen Sie die Grenzwerte der unendlichen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n/n!$ und $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n2^n)$. Wir erhalten die Grenzwerte der Reihen einfach indem wir die Reihe als Potenzreihe einer Funktion $f(x)$ an einem bestimmten Punkt x identifizieren. Wir erhalten

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = -1 + e^2 \quad (25)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2. \quad (26)$$

3. Vektoranalysis

(15 Punkte)

Berechnen Sie

$$I = \int_A d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \quad (27)$$

über den Teil der Fläche $z = 9 - x^2 - 9y^2$, der über der (x, y) -Ebene liegt. Hier bezeichnet $z = f(x, y)$ eine Parametrisierung der zwei-dimensionalen Fläche, d.h. Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die dieser Gleichung genügen liegen auf der Fläche. Der Teil der Fläche mit $z > 0$ ist mit A bezeichnet. Das Vektorfeld ist gegeben als $\mathbf{V} = 2xy\mathbf{e}_x + (x^2 - 2x)\mathbf{e}_y - x^2z^2\mathbf{e}_z$.

Wir berechnen das Integral mit Hilfe des Stokesschen Satzes

$$I = \int_A d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \oint_{\partial A} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}, \quad (28)$$

wobei ∂A den Rand der Fläche A bezeichnet. Dieser Rand liegt bei $z = 0$ und beschreibt eine Ellipse $x^2 + 9y^2 = 9$. Wir können den Weg der die Ellipse entgegen des Uhrzeigersinns durchläuft daher parametrisieren als

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

wobei $t \in [0, 2\pi]$, $a = 3$ und $b = 1$. Wir erhalten also

$$I = \int_0^{2\pi} dt \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = \int_0^{2\pi} dt \left(-2a^2b \cos(t) \sin^2(t) + a^2b \cos^3(t) - 2ab \cos^2(t) \right). \quad (30)$$

Das Integral der ersten beiden Terme verschwindet

$$I_1 = \int_0^{2\pi} dt \cos(t) \sin^2(t) = -\sin^3(t) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} dt 2 \sin^2(t) \cos(t) = 2I_1 \Rightarrow I_1 = 0 \quad (31)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} dt \cos^3(t) = \sin(t) \cos^2(t) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} dt 2 \sin^2(t) \cos(t) = -2I_1 = 0. \quad (32)$$

Integration des dritten Terms ergibt das Resultat

$$I = -2ab\pi = -6\pi. \quad (33)$$

4. Halber Looping

(15 + 10 + 5 = 30 Punkte)

Ein kleines Objekt der Masse $m = 1$ kg wird aus der Höhe h auf einer schiefen Ebene losgelassen und gleitet ohne Reibung hinab. Die Rampe ist ohne Kanten mit der horizontalen Ladefläche eines Wagens der Masse M verbunden (siehe Abb.). Der Wagen besitzt in der Mitte eine halb-zylindrische Oberfläche mit Radius $R = 0.36$ m.

Das kleine Objekt erreicht den höchsten Punkt des Halbzylinders und stoppt dort. Von dort aus fällt es vertikal im freien Fall herunter und berührt schliesslich den Wagen *genau* an der Kante. Vernachlässigen Sie Reibung in diesem Problem.

(a) Was ist die minimale Länge L des Wagens ?

Es gilt Impulserhaltung in horizontaler Richtung, da keine externen Kräfte entlang dieser Richtung existieren. Daher gilt

$$mv = MV, \quad (34)$$

wobei $v = \sqrt{2gh}$ die Geschwindigkeit der kleinen Masse ist wenn sie auf den Wagen trifft und V die Geschwindigkeit des Wagens bezeichnet, nachdem die kleine Masse den höchsten Punkt des Loopings erreicht hat. Dazwischen wird der Impuls von der kleinen Masse auf den Wagen übertragen, da der Looping auf die kleine Masse eine Normalkraft ausübt und (nach actio=reactio) die Masse auf den Looping eine ebensolche in entgegengesetzter Richtung.

Die minimale Länge des Wagens korrespondiert dabei zu dem Fall, in dem V minimal ist, d.h. auch v minimal ist. Denn die Zeit T , die die kleine Masse im freien Fall benötigt um vom oberen Ende des Loopings zurück auf die Ladefläche des Wagens zu fallen ist nach $\frac{gT^2}{2} = 2R$ gleich

$$T = 2\sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (35)$$

Damit die kleine Masse m an das obere Ende des Loopings gelangt, muß für die Normalkraft $\mathbf{N}$, die vom Looping auf die Masse wirkt, gelten $|\mathbf{N}| \geq 0$. Nun sind wir am Fall minimaler Anfangsgeschwindigkeit v interessiert. Für den Fall gilt offensichtlich, daß die Normalkraft im höchsten Punkt des Loopings verschwindet $|\mathbf{N}(2R)| = 0$. Dort wird die Zentripetalbeschleunigung also rein von der Gravitationsbeschleunigung erbracht. Es gilt also

$$\frac{v_{\text{rel}}^2}{R} = g, \quad (36)$$

wobei $v_{\text{rel}} = v(2R) - V(2R)$ die relative Geschwindigkeit von kleiner Masse und Looping ist. Wir wissen, daß die Masse im höchsten Punkt stoppt, d.h. $v(2R) = 0$ und daher

$$\frac{V^2}{R} = g. \quad (37)$$

Daher gilt $V = \sqrt{Rg}$ und mit $T = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$ erhalten wir für die minimale Länge

$$L = 2VT = 4R = 1.44 \text{ m}. \quad (38)$$

(b) Wie groß ist die Masse des Wagens M ?

Ausser der Impulserhaltung gilt natürlich auch Energieerhaltung (keine Reibung im Problem). Die Energie zu dem Zeitpunkt in dem die kleine Masse auf den Wagen trifft ist gleich der Energie wenn die kleine Masse sich am höchsten Punkt des Loopings befindet

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2 + mg2R. \quad (39)$$

Verwenden wir Impulserhaltung $v = \frac{M}{m}V$ so erhalten wir

$$\frac{M^2}{m^2} - \frac{M}{m} - 4 = 0 \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \quad (40)$$

$$\Rightarrow M = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}m = 2.56 \text{ kg}. \quad (41)$$

(c) Aus welcher Höhe h über der Ladefläche wurde das kleine Objekt losgelassen ?

Mit $v = \sqrt{2gh}$ und $v = \frac{M}{m}V = \frac{1+\sqrt{17}}{2}\sqrt{gR}$ erhalten wir

$$h = \frac{1}{2} \frac{M^2}{m^2} R = R \frac{(1 + \sqrt{17})^2}{8} = 1.18 \text{ m}. \quad (42)$$

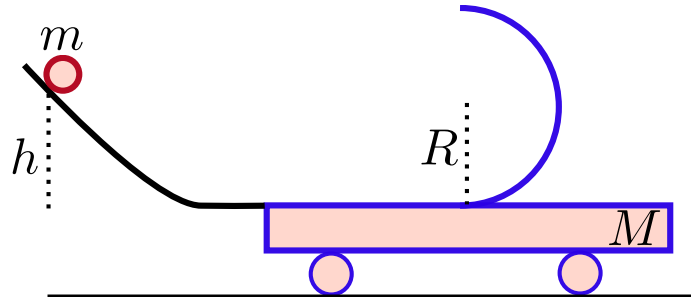


Abbildung 1: Abbildung zu Aufgabe 4.