

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 8
Abgabe 20.12.2013

1. Komplexe Zahlen

(5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 10 = 35 Punkte)

(a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in den drei Formen

$$x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (1)$$

und zeichnen Sie die Zahlen in der komplexen Ebene ein:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \quad (2)$$

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{-i\pi/3} \quad (3)$$

$$z_3 \sqrt{2} e^{-i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = 1 - i \quad (4)$$

$$z_4 = \frac{3+i}{2+i} = \frac{(3+i)(2-i)}{5} = \frac{7-i}{5} = \sqrt{2} \left(\frac{7}{5\sqrt{2}} - \frac{i}{5\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} e^{-i\theta} \quad (5)$$

$$z_5 = i^4 = e^{2\pi i} = 1. \quad (6)$$

with $\theta = -\tan^{-1}(1/7) \approx -0.1419$.(b) Finden Sie zu $z = x + iy$ jeweils

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

$$z^{-2} = \frac{1}{(x + iy)^2} = \frac{(x^2 - y^2) - 2ixy}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} \quad (8)$$

$$\frac{z}{z^*} = \frac{(x + iy)^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{x^2 + y^2}. \quad (9)$$

(c) Beschreiben Sie geometrisch die Menge von Zahlen, die jeweils folgenden Gleichungen genügen

- $|z| = 2$: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ beschreibt eine Kreislinie um den Ursprung mit Radius $r = 2$.
- $\operatorname{Re}(z^2) = 4$:

$$\operatorname{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (10)$$

beschreibt eine Hyperbel mit großer (oder reeller) Halbachse der Länge $a = 2$ und kleiner (oder imaginärer) Halbachse der Länge $b = 2$.

- $|z + 1| + |z - 1| = 8$:

$$\sqrt{1 + 2x + x^2 + y^2} + \sqrt{1 - 2x + x^2 + y^2} = 8 \quad (11)$$

Wir quadrieren die Gleichung, isolieren die verbleibende Wurzel, indem wir sie auf die rechte Seite bringen und quadrieren erneut. Dann erhalten wir

$$15x^2 + 16(y^2 - 15) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1. \quad (12)$$

Die beschreibt eine Ellipse mit großer (oder reeller) Halbachse der Länge $a = 4$ und kleiner (oder imaginärer) Halbachse der Länge $b = \sqrt{15}$.

- $z^2 = -(z^*)^2$: dies ergibt

$$x^2 + 2ixy - y^2 = -x^2 + 2ixy + y^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|. \quad (13)$$

Die beschreibt zwei senkrecht zueinander stehende Geraden durch den Ursprung, die die Winkel $\theta = \pi/4$ und $\theta = 3\pi/4$ zur x -Achse besitzen.

- (d) Zeigen Sie anhand der Potenzreihenentwicklung daß gilt $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ mit $z = x + iy$.

Wir erhalten

$$e^{x+iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{m} x^m (iy)^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{x^m (iy)^{n-m}}{m!(n-m)!} \quad (14)$$

wobei wir verwendet haben, dass gilt

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (15)$$

für $n, m \in \mathbb{N}$. Wir erkennen am Ausdruck in Gl. (14), dass es sich um das Cauchy Produkt zweier unendlicher Reihen handelt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} b_{n-\nu}. \quad (16)$$

Daher nimmt Gl. (14) folgende Gestalt an

$$e^{x+iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{x^m (iy)^{n-m}}{m!(n-m)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \right) = e^x e^{iy}. \quad (17)$$

Benutzen wir, dass $i^2 = -1$, so erhalten wir schliesslich

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y. \quad (18)$$

- (e) Bestimmen Sie alle komplexen Wurzeln der folgenden Ausdrücke. Schreiben Sie die komplexe Zahl dazu in der Polarkoordinatenform $z = re^{i\theta}$ und ziehen Sie dann die Wurzel:

$$\sqrt[4]{64} = (64e^{2\pi in})^{1/4} = \sqrt[4]{64} e^{2\pi in/4} \quad (19)$$

$$= \{2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, i2\sqrt{2}, -i2\sqrt{2}\} \quad (20)$$

$$\sqrt[3]{-1} = (e^{i\pi+2\pi in})^{1/3} = e^{i\frac{\pi}{3}+i2\pi\frac{n}{3}} \quad (21)$$

$$= \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{5\pi}{3}}\} \quad (22)$$

$$\sqrt[6]{-8i} = |8|^{1/6} e^{(i\frac{3\pi}{2}+2\pi in)\frac{1}{6}} = |8|^{1/6} e^{i\frac{3\pi}{12}+i\frac{4\pi n}{12}} \quad (23)$$

$$= |8|^{1/6} \{e^{i\frac{3\pi}{12}}, e^{i\frac{7\pi}{12}}, e^{i\frac{11\pi}{12}}, e^{i\frac{15\pi}{12}}, e^{i\frac{19\pi}{12}}, e^{i\frac{23\pi}{12}}\} \quad (24)$$

$$\sqrt{2+2i\sqrt{3}} = (2+2i|3|^{1/2}e^{\pi in})^{1/2} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}e^{in\pi}\right)^{1/2} \quad (25)$$

$$= \begin{cases} 2e^{(i\frac{\pi}{3}+2\pi im)\frac{1}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}+i\pi m} = \{2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{7\pi}{6}}\} & \text{for } n = 0 \\ 2e^{(-i\frac{\pi}{3}+2\pi im)\frac{1}{2}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}+i\pi m} = \{2e^{-i\frac{\pi}{6}}, 2e^{-i\frac{7\pi}{6}}\} & \text{for } n = 1 \end{cases} \quad (26)$$

$$\sqrt[5]{i} = e^{(i\frac{\pi}{2}+2\pi ni)\frac{1}{5}} = e^{i\frac{\pi}{10}+i2\pi\frac{n}{5}} = e^{i\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi ni}{10}} \quad (27)$$

$$= \{e^{i\frac{\pi}{10}}, e^{i\frac{5\pi}{10}}, e^{i\frac{9\pi}{10}}, e^{i\frac{13\pi}{10}}, e^{i\frac{17\pi}{10}}\}. \quad (28)$$

- (f) Der Logarithmus einer komplexen Zahl $z = re^{i\theta}$ ist definiert als $\ln z = \ln r + i\theta$. Da wir die gleiche Zahl erhalten falls sich θ um ein Vielfaches von 2π ändert, gibt es unendliche viele komplexe Logarithmen einer komplexen Zahl, die sich jeweils um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden. Man bezeichnet den Hauptwert des Logarithmus mit der Lösung bei der das Argument im Intervall $\theta \in (-\pi, \pi]$ liegt. Berechnen Sie

$$\ln(-1) = \ln|1| + i\pi + 2\pi in = (2n+1)i\pi. \quad (29)$$

$$i^{-2i} = e^{-2i \ln i} = e^{-2i(i\frac{\pi}{2} + 2\pi in)} = e^{\pi + 4\pi n} \quad (30)$$

$$i^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \ln i} = e^{\frac{1}{2}(i\frac{\pi}{2} + 2\pi in)} = e^{i\frac{\pi}{4} + i\pi n} \quad (31)$$

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\ln(1+i)} = e^{(1-i)[\ln|\sqrt{2}| + i\frac{\pi}{4} + 2\pi in]} = e^{\ln|\sqrt{2}| + \frac{\pi}{4} + 2\pi n} e^{i(-\ln|\sqrt{2}| + \frac{\pi}{4} + 2\pi n)}. \quad (32)$$

2. Differentialgleichungen

(10 + 5 = 15 Punkte)

- (a) Finden Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$y'' + y' - 2y = 0 \Leftrightarrow (D^2 + D - 2)y = 0 \quad (33)$$

mit $D = \frac{d}{dx}$. Das charakteristische Polynom besitzt die Nullstellen $D_1 = -2$ und $D_2 = 1$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = y_1 e^{-2x} + y_2 e^x \quad (34)$$

mit Konstanten $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Für die zweite Gleichung finden wir

$$y'' - 2y' = 0 \Leftrightarrow D(D-2)y = 0. \quad (35)$$

Das charakteristische Polynom besitzt die Nullstellen $D_1 = 0$, $D_2 = 2$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = y_1 + y_2 e^{2x}. \quad (36)$$

mit Konstanten $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Für die dritte Gleichung erhalten wir

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \Leftrightarrow D^2 + 2D + 2 = 0. \quad (37)$$

Das charakteristische Polynom besitzt die Nullstellen $D_{1/2} = -1 \pm i$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = y_1 e^{(-1-i)x} + y_2 e^{(-1+i)x}. \quad (38)$$

mit Konstanten $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

- (b) Finden Sie sowohl die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der Differentialgleichung, d.h. ohne den inhomogenen Term auf der rechten Seite $c = 0$, als auch die spezielle Lösung $y_p(x)$ für $c \neq 0$:

$$y'' - 4y = c \quad (39)$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Die Lösung der homogenen Gleichung (wo $c = 0$ gesetzt wird) erhalten wir aus dem charakteristischen Polynom $D^2 - 4 = 0$ und damit $D_{1/2} = \pm 2$ als

$$y_h(x) = y_1 e^{2x} + y_2 e^{-2x}. \quad (40)$$

Die spezielle (oder partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung können wir in diesem Fall einfach erraten als

$$y_p(x) = -\frac{c}{4}. \quad (41)$$

Die vollständige Lösung der Gl. (39) ist gegeben durch

$$y(x) = y_h + y_p = y_1 e^{2x} + y_2 e^{-2x} - \frac{c}{4}. \quad (42)$$

3. RLC Schaltkreis

(5 + 15 + 10 = 30 Punkte)

Betrachten Sie den einfachen elektrischen Schaltkreis in Abb. 1. Er enthält den Widerstand R , die Kapazität C und die Induktivität L . Der Strom, der im Schaltkreis fließt sei $I(t)$ und die Ladung auf dem Kondensator $Q(t)$, wobei $\dot{Q}(t) = I(t)$. Die Spannung, die am Widerstand abfällt ist gegeben durch RI , die Spannung am Kondensator durch Q/C und die Spannung über der Spule durch $L\dot{I}$. Aufgrund des Kirchhoffschen Gesetzes gilt also zu jedem Zeitpunkt

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = V(t), \quad (43)$$

wobei $V(t)$ die Spannung der externen Spannungsquelle bezeichnet. Differenzieren wir nach t erhalten wir

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{V}. \quad (44)$$

Betrachten Sie im Folgenden den RLC-Schaltkreis für $V = 0$.

- (a) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz ω_{LC} des Schaltkreises unter Vernachlässigung des Widerstands R .

Vernachlässigen wir R so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\ddot{I} + \frac{I}{LC} = 0 \Leftrightarrow \ddot{I} + \omega_{LC}^2 I = 0 \quad (45)$$

mit Frequenz $\omega_{LC} = 1/\sqrt{LC}$.

- (b) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (44) (für $V = 0$) in den drei Regimes: i) schwach gedämpfte (*engl.* underdamped), ii) kritisch gedämpfte (aperiodischer Grenzfall) (*engl.* critically damped) und iii) überdämpfte (Kriechfall) (*engl.* overdamped) Schwingungen.

Bestimmen Sie in welchem Regime sich der Schwingkreis befindet als Funktion der Parameter $\{L, C, R\}$.

Das charakteristische Polynom lautet

$$D^2 + \frac{R}{L}D + \omega_{LC}^2 = 0 \quad (46)$$

und besitzt Nullstellen bei

$$D_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \omega_{LC}^2}. \quad (47)$$

Die drei Fälle unterscheidet man durch

- (i) schwach gedämpft: $\frac{R^2}{4L^2} < \omega_{LC}^2$, d.h. der Ausdruck unter der Wurzel ist negativ und die Wurzel imaginär.

- (ii) aperiodischer Grenzfall: $\frac{R^2}{4L^2} = \omega_{LC}^2$, d.h. der Ausdruck unter der Wurzel verschwindet.
- (iii) überdämpft: $\frac{R^2}{4L^2} > \omega_{LC}^2$, d.h. der Ausdruck unter der Wurzel ist positiv und die Wurzel darum reell.

Wir finden die Lösungen

$$I_i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left\{ A \cos\left(\sqrt{\omega_{LC}^2 - \frac{R^2}{4L^2}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\omega_{LC}^2 - \frac{R^2}{4L^2}}t\right) \right\}. \quad (48)$$

$$I_{ii}(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} + Bte^{-\frac{R}{2L}t} \quad (49)$$

$$I_{iii}(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left\{ Ae^{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \omega_{LC}^2}t} + Be^{-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \omega_{LC}^2}t} \right\}. \quad (50)$$

Wir finden die vollständige Lösung im aperiodischen Grenzfall auf folgende Art. Beide Nullstellen sind im Fall $\frac{R^2}{4L^2} = \omega_{LC}^2$ identisch

$$(D - D_1)(D - D_1)I = 0 \quad (51)$$

mit $D = \frac{d}{dt}$ und $D_1 = \frac{R}{2L}$. Setzen wir $u(t) = (D - D_1)I = \dot{I} - D_1I$ so lautet die Gl. (51) für $u(t)$ gleich

$$(D - D_1)u(t) = 0. \quad (52)$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung 1. Ordnung und ihre Lösung lautet

$$u(t) = u_1 e^{D_1 t}. \quad (53)$$

Setzen wir dieses gefundene $u(t)$ in die Differentialgleichung (51) ein, so lautet diese

$$(D - D_1)I = u(t) \Leftrightarrow \dot{I} - D_1I = u(t). \quad (54)$$

Wir müssen also eine inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung lösen. Dies kann man auf verschiedene Arten tun, eine Möglichkeit wird als *Variation der Konstanten* bezeichnet und funktioniert auf die folgende Weise. Erst löst man die dazugehörige homogene Gleichung $\dot{I} - D_1I = 0 \Rightarrow I(t) = Ae^{D_1 t}$. Dann setzt man die Integrationskonstante A als zeitlich veränderlich an, d.h. man setzt $A \equiv A(t)$. Damit lautet die inhomogene Gleichung dann

$$\dot{A}e^{D_1 t} + AD_1e^{D_1 t} - D_1Ae^{D_1 t} = u_1e^{D_1 t} \quad (55)$$

$$\dot{A} = u_1 \Rightarrow A(t) = u_1 t + c. \quad (56)$$

Wir haben also die Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten als $I(t) = u_1 t e^{D_1 t} + c$. Dies gibt uns die zweite gesuchte Lösung von Gl. (44) im aperiodischen Grenzfall, und die vollständige Lösung ist gegeben durch Gl. (49).

- (c) Für welche Parameter klingt der Strom am schnellsten in der Zeit ab ?

Die Dynamik bei langen Zeiten ist von dem Term dominiert dessen reeller exponentieller Faktor, der die Dämpfung beschreibt, am kleinsten ist. Damit der Strom möglichst schnell abklingt muß der kleinere der beiden Faktoren am grössten sein. Mit anderen Worten: die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $D_{1/2}$ liegen in der komplexen Ebene. Die Dämpfung ist durch den Realteil $\text{Re}(D_{1/2})$ beschrieben (die Oszillationsfrequenz durch den Imaginärteil). Bei langen Zeiten ist die Dynamik durch den Pol mit dem kleinsten Realteil beschrieben. Damit der Strom möglichst rasch abklingt muss dieser möglichst groß sein. Betrachten wir Gl. (47) so sehen wir, dass der Strom am schnellsten im aperiodischen Grenzfall abklingt.

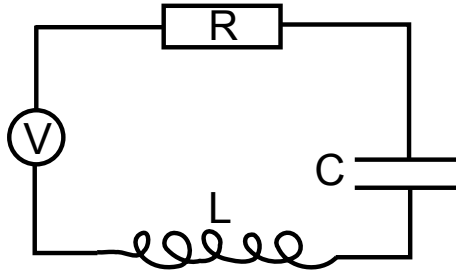


Abbildung 1: RLC-Schaltkreis

4. Bewegte Feder

(5 + 5 + 10 = 20 Punkte)

Die Ruhelänge einer ungedehnten Feder mit Federkonstante $D = 80 \text{ N/m}$ sei $L_0 = 0.6 \text{ m}$. Am unteren Ende der Feder ist eine kleine Masse $m = 2 \text{ kg}$ befestigt, die anfänglich auf dem Boden aufliegt. Das obere Ende der Feder wird vertikal über der Masse gehalten, so daß die Feder ungedehnt ist, d.h. das obere Ende befindet sich im Abstand L_0 über der kleinen Masse m .

Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wird das obere Ende der Feder mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0.5 \text{ m/s}$ vertikal nach oben bewegt.

- (a) Welche Höhe hat die kleine Masse m nach $T = 1.75 \text{ sec}$ erreicht ?

Wenn die Feder anfänglich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 nach oben gezogen wird, bleibt die Masse auf dem Tisch unbewegt liegen bis die Federkraft die Gravitationskraft kompensiert. Dies ist nach einer Federdehnung x_0 der Fall, wobei

$$x_0 = \frac{mg}{D}. \quad (57)$$

Dieser Punkt ist nach $t_0 = x_0/v_0 = 0.5 \text{ sec}$ erreicht.

Nun ist es vorteilhaft die Bewegung der kleinen Masse im Ruhesystem $'$ der Feder zu betrachten. Dieses geht durch eine Galileitransformation $x' = x - v_0 t$, $t' = t$ aus dem Laborsystem I hervor. In diesem vollzieht sie Schwingungen um die neue Ruhelage im Abstand $L_0 + x_0$ vom Federende. Im Nulldurchgang der Schwingungen besitzt die kleine Masse eine Geschwindigkeit von $-v_0$ in diesem bewegten Bezugssystem. Daraus können wir die Amplitude der Schwingungen bestimmen als

$$\dot{x}'(t) = -A\omega \cos[\omega(t - t_0)] \quad (58)$$

mit $\omega = \sqrt{D/m}$ und $A\omega = v_0 \rightarrow A = v_0/\omega$. Die Trajektorie der Feder ist im bewegten Bezugssystem I' und mit dem Ursprung $x' = 0$ im Nulldurchgang der Schwingungen ist durch

$$x'(t) = -A \sin[\omega(t - t_0)] \quad (59)$$

gegeben. Die Trajektorie der kleinen Masse im Laborsystem I lautet

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq t_0 \\ v_0(t - t_0) - A \sin[\omega(t - t_0)] & \text{für } t \geq t_0 \end{cases} \quad (60)$$

Nach $T = 1.75 \text{ sec}$ befindet sich die Masse also am Punkt $x(T) = 0.546 \text{ m}$.

- (b) Welche Arbeit wurde bis zu dem Zeitpunkt T von der Kraft, die die Feder anhebt verrichtet ?

Die verrichtete Arbeit setzt sich zusammen aus potentieller Energie der kleinen Masse, kinetischen Energie der kleinen Masse sowie potentielle Energie der Feder-
ausdehnung

$$W = \int dx \, mg + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} D(v_0 t - x(t))^2. \quad (61)$$

Zum Zeitpunkt $T = 1.75$ sec wurde $W = 15.53$ J an Arbeit verrichtet durch die Kraft, die die Feder anhebt.

- (c) Berechnen und beschreiben Sie die Leistung $P(t)$ als Funktion der Zeit.

Die Leistung ergibt sich als Ableitung der Energie zu

$$P(t) = \dot{W}(t) = mg\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} + D(v_0 t - x)(v_0 - \dot{x}) \quad (62)$$

$$(63)$$

$$= \begin{cases} Dv_0^2 t & \text{für } 0 \leq t \leq t_0 \\ mgv_0 + mv_0^2 \omega \sin[\omega(t - t_0)] & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}. \quad (64)$$

Wir zeigen die Leistung als Funktion der Zeit in Abb. 2.

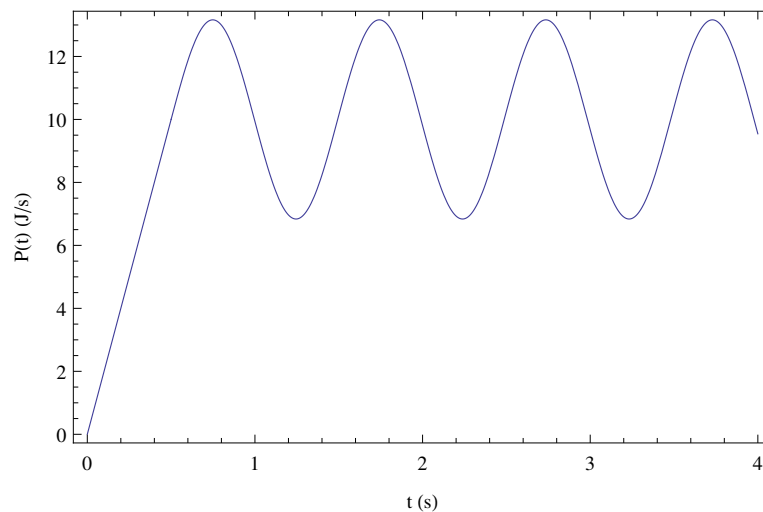


Abbildung 2: Leistung $P(t)$ als Funktion der Zeit t für Aufgabe 4.