

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 9, 100 Bonuspunkte
Abgabe und Besprechung 10.01.2014

1. Kollision (10 Punkte)

Ein Autofahrer, der mit der Geschwindigkeit v_1 fährt, kann vor einem unerwarteten Hindernis gerade noch zum Stehen kommen. Mit welcher Restgeschwindigkeit v wäre er auf das Hindernis aufgefahren, wenn er mit der Geschwindigkeit $v_2 > v_1$ gefahren wäre und exakt am selben Ort mit derselben (konstanten) Beschleunigung a zu bremsen begonnen hätte. Lösen Sie die Aufgabe für allgemeine v_1 und v_2 . Welchen Wert erhalten Sie für $v_1 = 40 \text{ km/h}$ und $v_2 = 50 \text{ km/h}$?

Der Betrag an kinetischer Energie, der beim Bremsen in andere Energieformen umgewandelt wird beträgt $E_1 = \frac{m}{2}v_1^2$, wobei m die Masse des Autos bezeichnet. Im Fall, dass das Auto anfänglich die Geschwindigkeit v_2 besitzt, beträgt seine restliche kinetische Energie also

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad (1)$$

und seine Geschwindigkeit

$$\frac{m}{2}v^2 = \Delta E \Rightarrow v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2}. \quad (2)$$

Für die angegebenen numerischen Werte erhalten wir eine Restgeschwindigkeit von $v = 30 \text{ km/h}$ mit der das Auto auf das Hindernis prallt.

2. Vektoranalysis (5 + 10 + 10 = 25 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Gradienten des Potentials $V(x, y, z) = C/r$ mit $C \in \mathbb{R}$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, und seinen Betrag.

Der Gradient des Potentials lautet

$$\nabla V = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \partial_i V(r) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = - \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{C}{r^2} \frac{x_i}{r} = - \frac{C}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (3)$$

Der Betrag des Gradienten des Potentials lautet daher

$$|\nabla V| = \frac{C}{r^2}. \quad (4)$$

- (b) Berechnen Sie die Arbeit, die verrichtet wird, wenn man ein Teilchen vom Punkt $a = (1, 0, 0)$ zum Punkt $b = (-1, 0, \pi)$ entlang der folgenden Wege C_1 und C_2 im Kraftfeld $\mathbf{F} = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ bewegt:

- C_1 : entlang der Helix $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$,
Eine Parametrisierung des Weges entlang der Helix lautet

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

mit $t \in [0, \pi]$. Wir erhalten daher für die Arbeit entlang des Weges C_1

$$W_1 = \int_{C_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^\pi dt \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{F}[\mathbf{r}_1(t)] = \int_0^\pi dt (\sin^2 t + \cos^2 t + t) = \pi + \frac{\pi^2}{2}. \quad (6)$$

- C_2 : entlang der Geraden, die die beiden Punkte verbindet. Eine Parametrisierung des geraden Weges lautet $\mathbf{r}_2(t) = (\mathbf{b} - \mathbf{a})t + \mathbf{a}$ mit $t \in [0, 1]$:

$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -2t + 1 \\ 0 \\ \pi t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Wir erhalten daher für die Arbeit entlang des Weges C_2

$$W_2 = \int_{C_2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^1 dt \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \cdot \mathbf{F}[\mathbf{r}_2(t)] = \int_0^1 dt (4t - 2 + \pi t^2) \quad (8)$$

$$= \frac{\pi^2}{2}. \quad (9)$$

- (c) Berechnen Sie das folgenden Oberflächenintegral

$$I = \int_A d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (10)$$

mit $\mathbf{E} = x^2 \mathbf{e}_x + z^2 \mathbf{e}_y - y^2 \mathbf{e}_z$ über den Teil der Fläche $z = 4 - x^2 - y^2$, der oberhalb der x - y -Ebene liegt.

Wir verwenden Stokes' Satz

$$\int_A d\mathbf{s} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \oint_{\partial A} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \quad (11)$$

um das Integral I in ein Wegintegral über den Rand der Fläche umzuformen. Der Rand ∂A beschreibt einen Kreis $x^2 + y^2 = 4$ mit Radius $r = 2$ um den Ursprung in der x - y -Ebene. Wir können den Weg entlang des Kreises parametrisieren als

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

mit $t \in [0, 2\pi]$. Wir erhalten für das Integral also

$$I = \int_0^{2\pi} dt \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{r}(t)] = - \int_0^{2\pi} dt \sin t \cos^2 t = 0. \quad (13)$$

3. Differentialgleichungen

(10 + 15 = 25 Punkte)

- (a) Geben Sie die allgemeine Lösung $v(t)$ der Differentialgleichung $\dot{v} + \beta v - g = 0$ mit $\beta, g \in \mathbb{R}$. Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$? Geben Sie eine Lösung mit dem Anfangswert $v_0(t=0) = v_0$ an.

Eine allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung (d.h. mit rechter Seite ungleich Null) setzt sich aus der Summe der homogenen Lösung (d.h. der Lösung der Gleichung mit rechter Seite gleich Null) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Die homogene Lösung der Gleichung findet man aus dem charakteristischen Polynom (Ansatz: $v(t) = Ae^{Dt}$):

$$\dot{v} + \beta v = 0 \Rightarrow D + \beta = 0 \Leftrightarrow D = -\beta \quad (14)$$

Die homogene Lösung lautet also

$$v_h(t) = Ae^{-\beta t} \quad (15)$$

mit der Konstanten A , die durch die Anfangsbedingung bestimmt wird. Die spezielle (oder partikuläre) Lösung der Gleichung findet sich durch Ausprobieren zu

$$v_p(t) = \frac{g}{\beta}. \quad (16)$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung lautet also

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = Ae^{-\beta t} + \frac{g}{\beta}. \quad (17)$$

Schließlich bestimmen wir noch A aus der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ zu $A + \frac{g}{\beta} = v_0 \Leftrightarrow A = v_0 - \frac{g}{\beta}$. Die gesuchte Lösung der Differentialgleichung lautet also

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{g}{\beta}\right)e^{-\beta t} + \frac{g}{\beta}. \quad (18)$$

- (b) Geben Sie die vollständigen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an. Eine vollständige Lösung besteht aus der Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (mit rechter Seite gleich Null) und der speziellen Lösung (im Falle einer inhomogenen Gleichung mit nicht-verschwindender rechter Seite).

$$y''' + y = 0 \quad (19)$$

$$4y'' + 12y' + 9 = 0 \quad (20)$$

$$y'' + y' - 2y = e^{2x} \quad (21)$$

Das charakteristische Polynom zu $y''' + y = 0$ lautet $D^3 + 1 = 0$ und wir müssen also die dritten Wurzeln von $-1 = \exp(i\pi + 2\pi in)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ bestimmen. Diese lauten $D_{1,2} = e^{\pm i\pi/3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $D_3 = e^{i\pi} = -1$ und die Lösung der Differentialgleichung also

$$y(x) = y_3 e^{-x} + e^{x/2} \left(y_1 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + y_2 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) \quad (22)$$

mit Konstanten y_1 , y_2 und y_3 die durch die Anfangsbedingung festgelegt werden.

Wir lösen die Differentialgleichung $4y'' + 12y' + 9 = 0$ indem wir zuerst die Funktion $z(x) = y'(x)$ definieren, die folgender Gleichung genügt

$$4z'(x) + 12z(x) = -9. \quad (23)$$

Die homogene Lösung der Gleichung findet man aus dem charakteristischen Polynom $4D + 12 = 0$ als $z_h(x) = z_1 e^{-3x}$ mit $z_1 \in \mathbb{R}$. Die partikuläre Lösung dieser Gleichung kann man durch Ausprobieren leicht bestimmen zu $z_p(x) = -\frac{3}{4}$. Die allgemeine Lösung für die Funktion $z(x)$ ist also gegeben durch

$$z(x) = z_1 e^{-3x} - \frac{3}{4} \quad (24)$$

und damit lautet die Lösung für $y(x) = \int dx z(x)$

$$y(x) = -\frac{z_1}{3} e^{-3x} - \frac{3}{4} x + z_2 = A + B e^{-3x} - \frac{3}{4} x \quad (25)$$

mit reellen Konstanten $z_1, z_2, A, B \in \mathbb{R}$.

Die homogene Lösung der Gleichung $y'' + y' - 2y = e^{2x}$ findet man aus dem charakteristischen Polynom $D^2 + D - 2 = 0$ zu

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{-2x} \quad (26)$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$. Um eine partikuläre Lösung zu finden machen wir den Ansatz $y(x) = Ce^{2x}$ und erhalten, wenn wir ihn in die Differentialgleichung einsetzen

$$4Ce^{2x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = e^{2x} \quad (27)$$

$$(4C + 2C - 2C)e^{2x} = e^{2x}. \quad (28)$$

Der Ausdruck in der Klammer in Gl. (28) muß gleich 1 sein und wir bestimmen C damit zu $C = \frac{1}{4}$. Die partikuläre Lösung lautet also

$$y_p(x) = \frac{1}{4}e^{2x}, \quad (29)$$

und die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}. \quad (30)$$

4. Sanduhr

(10 + 10 = 20 Punkte)

Eine Sanduhr werde im abgelaufenen Zustand gewogen, danach während des Ablaufens, bei dem pro Zeit eine Sandmenge $dm/dt = a$ mit $a > 0$ ausläuft, die näherungsweise eine konstante Höhe h reibungslos durchfällt.

- (a) Berechnen Sie die Gewichtsminderung ΔF_- durch die im Fallen begriffene Sandmenge.

Die Masse an Sand, die sich im freien Fall befindet reduziert das Gewicht der Sanduhr, da keine Normalkraft auf diese Sandmasse aufzubringen ist. Die Dauer des freien Falls bestimmt sich aus $\frac{1}{2}gT^2 = h$ zu $T = \sqrt{2h/g}$. Die Menge an Sand, die sich im Fallen befindet ist daher (im stationären Zustand) $\Delta m = \frac{dm}{dt}T = aT$. Die Gewichtsminderung ΔF_- ist damit gegeben durch

$$\Delta F_- = \Delta mg = aTg = a\sqrt{2hg}. \quad (31)$$

- (b) Berechnen Sie die Gewichtszunahme ΔF_+ durch das Auftreffen des Sandes.

Die Gewichtszunahme durch das Auftreffen des Sandes auf den Boden ergibt sich durch die Änderung des Impulses des fallenden Sandes da $\dot{p} = F$. Wir finden daher

$$\Delta F_+ = \frac{dm}{dt}v = a\sqrt{2hg} = \Delta F_- \quad (32)$$

da $v = gT = \sqrt{2gh}$ ist.

5. Umzugsservice Krabbe & Schwan GmbH

(20 Punkte)

Die Studenten haben den Tutoren der Klassischen Theoretischen Physik I ein großes Weihnachtsgeschenk gemacht. Zwei Umzugshelfer, Karlo Krabbe und Dr. Siegmund Schwan vom Durlacher Umzugsservice Krabbe und Schwan GmbH müssen das schmale

und auf einer langen Fläche liegende Paket über eine raue Oberfläche mit Reibungskoeffizient $\mu = 0.5$ unter den Weihnachtsbaum bewegen (siehe Abb. 1). Die Masse des Pakets beträgt $m = 150$ kg. Dr. Schwan kann maximal eine Kraft von $F_s = 700$ N ausüben und Karlo Krabbe eine Kraft von $F_k = 350$ N. Offensichtlich könnten die beiden das Paket gemeinsam einfach bewegen; allerdings bestehen beide darauf, das mit der ihnen natürlich vorkommenden Technik zu tun und können sich daher mal wieder nicht einigen.

Zeigen Sie, dass beide das Paket auch alleine bewegen können. Dabei verwenden die beiden unterschiedliche Methoden. Die beiden dürfen dabei weder das Paket zerlegen noch aufrichten. *Hinweis:* die Namen der beiden Umzugshelfer sind nicht zufällig gewählt.

Dr. Siegmund Schwans Methode

Der Schwan wird eine Kraft F nicht rein horizontal, d.h. entlang x ausüben, sondern schräg nach oben in einem Winkel α mit der x -Achse. Wir wollen nun das optimale α bestimmen, so dass man das Paket mit minimaler Kraft F bewegen kann und schauen, ob es kleiner als $F_s = 700$ N ist, der maximalen Kraft die Dr. Schwan ausüben kann. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$F \cos \alpha - \mu N = ma_x \quad (33)$$

$$F \sin \alpha + N - mg = 0. \quad (34)$$

Die Normalkraft erhalten wir aus Gl. (34) $N = mg - F \sin \alpha$. Damit nimmt Gl. (33) die Form an

$$F(\mu \sin \alpha + \cos \alpha) - \mu mg = ma_x. \quad (35)$$

Damit $a_x \geq 0$ muß also eine Kraft

$$F \geq \frac{\mu mg}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \quad (36)$$

ausgeübt werden. Den optimalen Winkel bestimmen wir aus der Bedingung dass der Nenner maximal wird aus

$$\frac{d}{d\alpha}(\mu \sin \alpha + \cos \alpha) = 0 \quad (37)$$

$$\Rightarrow \mu = \tan \alpha. \quad (38)$$

Die minimale Kraft, die benötigt wird um das Paket zu bewegen ist also gegeben durch

$$F_{\min} = \frac{\mu mg}{\cos \alpha(1 + \mu^2)} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}} \approx 658 \text{ N}, \quad (39)$$

wobei wir verwendet haben, daß $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$. Da $F_{\min} < F_s$ kann der Schwan das Paket bewegen.

Karlo Krabbes Methode

Karlo Krabbe übt eine Kraft am Rand des Pakets aus, um es drehend fortzubewegen. Wenn der Drehpunkt x_0 (siehe Abb. 1) nicht mit dem Mittelpunkt $x = L/2$ übereinstimmt, bewegt er das Paket auf diese Weise nach einer halben Drehung (um π) also um die Distanz $2(\frac{L}{2} - x_0) = L - 2x_0$ nach links.

Die Frage, die wir beantworten müssen ist was die minimale Kraft ist, das Paket zu Drehen und wo die Drehachse für diese minimale Drehachse liegt. Falls die minimale Kraft kleiner ist als F_k und die dazugehörige Drehachse nicht im Mittelpunkt liegt (d.h. $x_0 \neq L/2$), dann kann Karlo Krabbe das Paket bewegen.

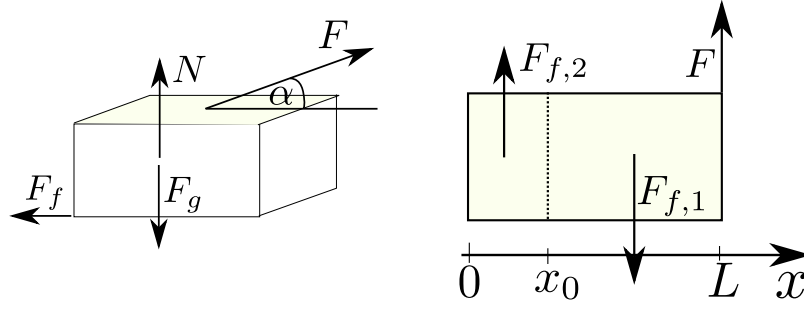


Abbildung 1: Links: Methode von Schwan. Rechts: Methode von Krabbe.

Wir fragen erstmal ganz allgemein, was die minimale Kraft ist, die man braucht um das Paket zu drehen für eine gegebene Drehachse x_0 . Wir bohren sozusagen in Gedanken ein Loch in das Paket und installieren dort eine feste Drehachse und fragen uns was für eine Kraft man minimal anwenden muß um das Paket zu drehen. Die Bedingung für die minimale Kraft ist, dass das Drehmoment M am Drehachsenpunkt verschwindet für die maximalen Reibungskräfte, die wirken können.

Allgemein wirken zwei Reibungskräfte $F_{f,1} \leq \mu mg \frac{L-x_0}{L}$ und $F_{f,2} \leq \mu mg \frac{x_0}{L}$, wie in Abb. 1 eingezeichnet. Sie greifen am Schwerpunkt des jeweiligen Teils des Pakets an und sich proportional zur Normalkraft des jeweiligen Teils des Pakets. Sie zeigen in unterschiedliche Richtungen, da die Teile des Pakets links und rechts der Drehachse bei einer Drehung in verschiedene Richtungen bewegt werden.

Die Kraft F bei der das Paket sich gerade noch nicht dreht ist dadurch charakterisiert, daß das Drehmoment an der Drehachse für die maximalen Werte der Reibungskräfte verschwindet, d.h. (Drehmoment = Kraft *times* Hebelarm)

$$F(L - x_0) - F_{f,1} \frac{L - x_0}{2} - F_{f,2} \frac{x_0}{2} = 0 \quad (40)$$

$$\Rightarrow F = \frac{\mu mg(2x_0^2 - 2Lx_0 + L^2)}{2L(L - x_0)}. \quad (41)$$

Für jede Kraft F größer als dieser Wert fängt das Paket an, sich um die Drehachse an der Stelle x_0 zu drehen.

Nun fragen wir nach dem Ort der Drehachse an dem eine minimale Kraft genügt, um das Paket zu drehen. Das ist ja auch genau die Drehachse die im Fall von Karlo Krabbel (d.h. ohne von außen vorgegebene Drehachse) realisiert wird. Die Drehachse ergibt sich ja dadurch dass sie zu der minimalen Kraft gehört die benötigt wird, um das Paket zu drehen. Um die minimale Kraft zu bestimmen, müssen wir folgende Gleichung lösen

$$\frac{dF}{dx_0} = 0 \Rightarrow x_{0,min} = L \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (42)$$

Die Drehachse liegt also nicht im Mittelpunkt des Pakets und Karlo kann das Paket auf diese Weise fortbewegen, vorausgesetzt die minimale Kraft ist kleiner als F_k . Die minimale Kraft, die benötigt wird, um das Paket um $x_{0,min}$ zu drehen, berechnet sich aus Gl. (41) zu

$$F_{min} = \mu mg(\sqrt{2} - 1) \approx 305 \text{ N} < F_k, \quad (43)$$

also kann Karlo Krabbe das Paket auf seine Weise auch unter der Weihnachtsbaum bewegen.