

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014**Prof. Dr. J. Schmalian****Blatt 10, 100 Punkte****Dr. P. P. Orth****Abgabe und Besprechung 17.01.2014****1. Schiefe Ebene**

(10 + 10 = 20 Punkte)

Zwei massive Blöcke gleicher Masse $m = 3 \text{ kg}$ sind über eine Feder mit Federkonstante $D = 200 \text{ N/m}$ miteinander verbunden und befinden sich auf einer schiefen Ebene, die einen Winkel von $\alpha = 15^\circ$ mit der Horizontalen besitzt. Der Reibungskoeffizient zwischen dem Block, der sich weiter oben auf der schiefen Ebene befindet und der Ebene lautet $\mu_1 = 0.3$, und der Reibungskoeffizient des anderen Blocks lautet $\mu_2 = 0.1$. Nach einer Weile bewegen sich die beiden Blöcke miteinander und erfahren die gleiche Beschleunigung.

- (a) Berechnen Sie den Wert der Beschleunigung.

Wenn sich die Massen gemeinsam nach unten bewegen erfahren sie die gleiche Beschleunigung wie der Schwerpunkt m_s . Es gilt dass $m_s \mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}}^{(i)}$. Die verschiedenen externen Kräfte die auf das System wirken sind die Gravitations-, Normal- und Reibungskräfte auf die beiden einzelnen Massen. Es gilt also für die Tangentialkomponente entlang der schiefen Ebene

$$2ma = 2mg \sin \alpha - (\mu_1 + \mu_2)mg \cos \alpha \quad (1)$$

$$\Rightarrow a = g \sin \alpha - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} g \cos \alpha. \quad (2)$$

Setzen wir die Zahlenwerte ein, so erhalten wir $a = 0.64 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- (b) Berechnen Sie die Ausdehnung der Feder aus der Gleichgewichtslage.

Die Ausdehnung der Feder x_0 ist dadurch bestimmt, dass die Kräfte entlang der Tangentialrichtung der Ebene gleich sind für die beiden Massen, denn dann bewegen sie sich relativ zueinander nicht. Es gilt also

$$-mg \sin \alpha + \mu_1 mg \cos \alpha - Dx_0 = -mg \sin \alpha + \mu_2 mg \cos \alpha + Dx_0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)mg \cos \alpha}{2D}. \quad (4)$$

Setzen wir die Zahlenwerte ein, so erhalten wir $x_0 = 1.42 \text{ cm}$.

2. Kraftstoß

(5 + 15 = 20 Punkte)

Ein Block der Masse $M = 5 \text{ kg}$ bewegt sich über eine horizontale Ebene. Ein kleineres Objekt der Masse $m = 1 \text{ kg}$ fällt von oben auf den Block mit einer vertikalen Geschwindigkeit von $v_m = 10 \text{ m/s}$ und bleibt fest auf dem Block haften. Die Geschwindigkeit des Blocks M zum Zeitpunkt der Kollision beträgt $v_M = 2 \text{ m/s}$. Nehmen Sie an, dass die Kollision instantan verläuft.

- (a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Blocks nach der Kollision im Falle einer reibungsfreien Ebene.

Im Fall einer reibungsfreien Ebene rührt allein die Änderung der Masse zu einer Geschwindigkeitsänderung. Es gilt Impulserhaltung entlang der horizontalen Richtung, da alle äußeren Kräfte vertikal wirken, und daher

$$Mv_M = (M + m)v \Rightarrow v = \frac{Mv_M}{M + m}. \quad (5)$$

- (b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Blocks nach der Kollision für den Fall, dass die Ebene einen Reibungskoeffizienten $\mu = 0.4$ besitzt.

Falls eine Reibungskraft zwischen dem grossen Block M und der Oberfläche wirkt, so muß man die kurzzeitige Erhöhung der Normalkraft durch das Auftreffen der kleinen Masse berücksichtigen. Diese übt einen Kraftstoß auf die grosse Masse in vertikaler Richtung. Die Normalkraft der großen Masse ist also gleich

$$N(t) = Mg\theta(-t) + (M + m)g\theta(t) + mv_m\delta(t), \quad (6)$$

wobei $\theta(t)$ die Heaviside-Funktion ist. Integrieren wir über den infinitesimalen Zeitabschnitt zwischen $t = -\epsilon$ und $t = \epsilon$ mit $\epsilon \ll 1$ während der der Stoß stattfindet, so gilt

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt Ma_1 + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} m\theta(t)a_2 = -\mu \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt N(t) \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow M(v_1(\epsilon) - v_1(-\epsilon)) + m(v_2(\epsilon) - v_2(0)) = -\mu(mv_m + (M + m)g\epsilon + Mg\epsilon). \quad (8)$$

Es gilt, dass $v_1(\epsilon) = v_2(\epsilon) = v$, da die beiden Massen für $t > 0$ aneinander haften. Ausserdem gilt, dass $v_1(-\epsilon) = v_M$ und $v_2(0) = 0$, da die kleine Masse m keine horizontale Geschwindigkeitskomponente vor dem Zusammenstoß besitzt. Nun nehmen wir dann noch den Limes $\epsilon \rightarrow 0$. Physikalisch bedeutet dies, dass der Zusammenstoß in einer solch kurzen Zeit abläuft, dass die reguläre Normalkraft keine Geschwindigkeitsänderung erwirkt. Wir erhalten für die Geschwindigkeit $v(\epsilon) = v$ direkt nach dem Zusammenstoß

$$v = \frac{Mv_M - \mu mv_m}{M + m}. \quad (9)$$

Noch einfacher und transparenter bekommen wir das Ergebnis, wenn wir den Impuls $p(t)$ verwenden und die (integrierte) Newtonsche Bewegungsgleichung (7) schreiben als

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt \dot{p} = -\mu \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt N(t) \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow p(\epsilon) - p(-\epsilon) = -\mu[mv_m + (M + m)g\epsilon + Mg\epsilon]. \quad (11)$$

Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ erhalten wir also

$$(M + m)v = Mv_M - \mu mv_m \Leftrightarrow v = \frac{Mv_M - \mu mv_m}{M + m}. \quad (12)$$

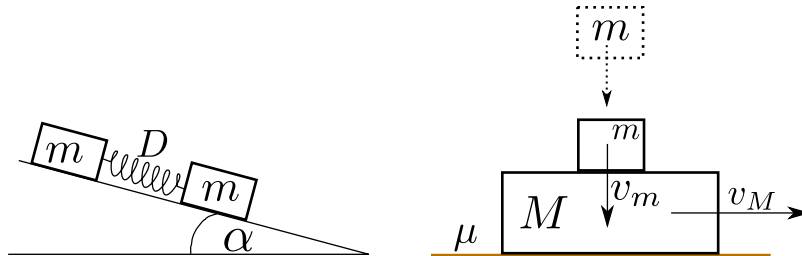


Abbildung 1: Links: Abbildung zu Aufgabe 1. Rechts: Abbildung zu Aufgabe 2.

3. Die Dirac δ -Funktion

(5 + 10 + 5 + 10 = 30 Punkte)

Die Dirac δ -Funktion ist durch die Eigenschaft

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{wenn } x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (13)$$

definiert. Intuitiv gilt, dass $\delta(0) = \infty$ und $\delta(x \neq 0) = 0$. Im Folgenden sei $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$. Formal mathematisch handelt es sich nicht um eine Funktion, sondern um eine sogenannte Distribution, d.h. ein lineares mathematisches Objekt, dass einer Funktion (hier $f(x)$) eine Zahl (hier $f(x_0)$) zuordnet.

(a) Verwenden Sie die obengenannte Definition, um folgende Integrale auszuwerten

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(x) \delta(x) = \sin(0) = 0 \quad (14)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos(x) \delta(x) = \cos(0) = 1 \quad (15)$$

(b) Zeigen Sie durch Ihnen bekannte Integraltransmutationsregeln, dass

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (16)$$

indem Sie zeigen, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) \delta(ax) = \frac{1}{|a|} f(0). \quad (17)$$

Betrachten wir zuerst den Fall $a > 0$ und substituieren $y = ax$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) \delta(ax) = \int_{ax_1}^{ax_2} \frac{dy}{a} f(y/a) \delta(y) = \frac{f(0)}{a}. \quad (18)$$

Im Fall $a < 0$ substituieren wir mit $y = -|a|x$ und erhalten damit dass die Integralgrenzen (obere und untere) vertauscht werden und somit

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) \delta(-|a|x) = \int_{-|a|x_1}^{-|a|x_2} \frac{dy}{-|a|} f(-y/|a|) \delta(y) \quad (19)$$

$$= \int_{-|a|x_2}^{-|a|x_1} \frac{dy}{|a|} f(-y/|a|) \delta(y) = \frac{f(0)}{|a|}, \quad (20)$$

weil $-|a|x_2 < 0 < -|a|x_1$.

(c) Man kann auch Ableitungen der δ -Funktion definieren. Die erste Ableitung ist definiert durch

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) \delta'(x) = -f'(0). \quad (21)$$

Zeigen Sie, dass diese Definition formal durch partielle Integration und den Eigenschaften der δ -Funktion „folgt“.

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) \delta'(x) = \underbrace{f(x) \delta(x)}_{=0} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx f'(x) \delta(x) = -f'(0). \quad (22)$$

Wie würden Sie demnach die zweite Ableitung der δ -Funktion $\delta''(x)$ definieren ?

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) \delta''(x) = - \int_{x_1}^{x_2} dx f'(x) \delta'(x) = \int_{x_1}^{x_2} dx f''(x) \delta(x) = f''(0). \quad (23)$$

(d) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_0^\pi dx \sin(x) \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi/2) = 1 \quad (24)$$

$$\int_0^\pi dx \sin(x) \delta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ da } \frac{\pi}{2} \text{ nicht im Intervall } [0, \pi] \text{ liegt} \quad (25)$$

$$\int_{-1}^1 dx e^{3x} \delta'(x) = - \int_{-1}^1 dx 3e^{3x} \delta(x) = -3 \quad (26)$$

$$\int_0^\pi dx \cosh(x) \delta''(x-1) = \frac{d^2}{dx^2} \cosh(x) \Big|_{x=1} = \cosh(1) = 1.54308. \quad (27)$$

4. Darstellungen der δ -Funktion

(10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

Man kann die δ -Funktion als Grenzwert einer Funktionenfolge darstellen. Hier studieren wir zwei mögliche Funktionenfolgen.

(a) Lorentzfunktionsdarstellung: Zeigen Sie, dass die Lorentzfunktionenfolge

$$g_L(x, \alpha) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)} \quad (28)$$

im Limes $\alpha \rightarrow 0$ (z.B. $\alpha_n = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$) eine Darstellung der δ -Funktion ist

$$\delta_L(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g_L(x, \alpha) \quad (29)$$

indem Sie zeigen, dass

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} dx f(x) g_L(x, \alpha) = \begin{cases} f(0) & \text{wenn } x_1 < 0 < x_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (30)$$

Betrachten wir zuerst den Fall $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} dx f(x) g_L(x, \alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} dx f(x) \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\alpha\pi} \frac{f(x)}{1 + (x/\alpha)^2} \\ &\stackrel{y=x/\alpha}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_1/\alpha}^{x_2/\alpha} \frac{dy}{\pi} \frac{f(\alpha y)}{1 + y^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Wir vertauschen nun $\lim_{\alpha \rightarrow 0}$ und die Integration über x . Das ist eigentlich unter gewissen Bedingungen erlaubt, die hier erfüllt sind, nämlich die punktweise Konvergenz der Funktionenfolge $f(\alpha y)g_L(x, 1)$ gegen die Grenzfunktion $f(0)g_L(x, 1)$ sowie Integrierbarkeit einer Majorantenfunktion (siehe Lebesgue'scher Grenzwertsatz in jedem fortgeschrittenen Analysisbuch). Vertauschen wir also $\lim_{\alpha \rightarrow 0}$ und die Integration über x , so erhalten wir

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} dx f(x) g_L(x, \alpha) = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi} \frac{1}{1 + y^2} = \frac{f(0)}{\pi} \tan^{-1}(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} = f(0). \quad (32)$$

Betrachten wir nun die Fälle $x_1, x_2 < 0$ und $x_1, x_2 > 0$. In diesem Falle finden wir, dass die beiden Integrationsgrenzen des Integrals über y im Limes $\alpha \rightarrow 0$ identisch sind, das Integral verschwindet also. Anders betrachtet besitzt der Integrand einen Peak um $y = 0$ herum, wir integrieren allerdings über ein Intervall weit weg von $y = 0$.

Damit haben wir die Eigenschaften von Gl. (13) nachgewiesen.

(b) Gaußfunktionsdarstellung: Zeigen Sie, dass die Gaußfunktionenfolge

$$g_G(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\alpha^2} \quad (33)$$

im Limes $\alpha \rightarrow 0$ (z.B. $\alpha_n = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$) auch eine Darstellung der δ -Funktion ist

$$\delta_G(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g_G(x, \alpha) \quad (34)$$

indem Sie zeigen, dass gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} dx f(x) g_G(x, \alpha) = \begin{cases} f(0) & \text{wenn } x_1 < 0 < x_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (35)$$

Zuerst stellen wir fest, dass das Integral in den Fällen $x_1, x_2 < 0$ und $x_1, x_2 > 0$ aus den identischen Gründen wie in (a) verschwindet. Betrachten wir nun den Fall $x_1 < 0 < x_2$, so erhalten wir

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\alpha^2} f(x) \stackrel{y=x/\alpha}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_1/\alpha}^{x_2/\alpha} \frac{dy}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} f(\alpha y). \quad (36)$$

Vertauschen wir wiederum Limesbildung und Integration wie in (a), so erhalten wir

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\alpha^2} f(x) = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} = f(0), \quad (37)$$

wobei wir ein Ergebnis von Übungsblatt 2 verwendet haben, das besagt dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} = 1$.

(c) Integral-Darstellung: Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \delta(x) \quad (38)$$

indem Sie zeigen, dass der Ausdruck

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \alpha|k|} \right) \quad (39)$$

die Lorentzfunktionenfolge $g_L(x, \alpha)$ von Aufgabenteil (a) liefert.

Wir spalten das Integral in ein Integral über positive und negative Werte von k auf und erhalten dann

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \alpha|k|} \right) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{dk}{2\pi} e^{ikx + \alpha k} + \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \alpha k} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{e^{ikx + \alpha k}}{ix + \alpha} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{ikx - \alpha k}}{ix - \alpha} \Big|_0^{\infty} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{ix + \alpha} - \frac{1}{ix - \alpha} \right] = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{-2\alpha}{-x^2 - \alpha^2} \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)} = \delta(x) \end{aligned} \quad (40)$$

wobei wir die Lorentzfunktionendarstellung der δ -Funktion im letzten Schritt verwendet haben.