

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 11, 100 Punkte
Abgabe und Besprechung 24.01.2014

1. Nicht so schnell (10 Punkte)

Ein kleiner „Star Wars“ Glücksbringer hängt an einer Feder im Fahrerhaus eines LKWs und verursacht in Ruhe eine Ausdehnung der Feder von $x_0 = 0.1$ m. Der Truck fahre nun auf einer etwas älteren Autobahn, die aus Platten der Länge $L = 20$ m besteht, die so aneinanderliegen, dass stets ein kleiner Spalt zwischen den Platten existiert, dessen Breite vernachlässigt werden kann. Wenn der LKW die Geschwindigkeit v besitzt, oszilliert der kleine „Star Wars“-Held mit maximaler Amplitude. Bestimmen Sie v .

Der „Star Wars“ Held oszilliert mit maximaler Amplitude, wenn er in Resonanz angeregt wird. Wir bestimmen seine Resonanzfrequenz ω_0 aus

$$Dx_0 = mg \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{D/m} = \sqrt{g/x_0} = 10 \text{ s}^{-1} \quad (1)$$

mit $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Die Anregungsfrequenz bestimmen wir dadurch dass zwei aufeinanderfolgende Anregungen eine Periode $t_0 = L/v$ auseinanderliegen, wenn der LKW mit Geschwindigkeit v fährt. Die Resonanzbedingung ist also mit $T = 2\pi/\omega_0$ erfüllt falls

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{L}{v} \Rightarrow v = \frac{L\omega_0}{2\pi} = 31.53 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 113.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (2)$$

2. Fensterputzer (15 + 10 = 25 Punkte)

Ein Fensterputzer mit einer Masse von 81 kg, der von einem Seemannsstuhl aus arbeitet (siehe Abb. 1), der an der Seite eines hohen Gebäudes herunterhängt, möchte sich schnell bewegen. Er zieht mit einer solchen Kraft an dem Fallseil nach unten, dass er nur mit einer Kraft von 450 N gegen den Stuhl drückt. Der Stuhl selbst hat eine Masse von 13.5 kg (rechnen Sie mit $g = 10 \text{ m/s}^2$). Die Masse des Seils sowie Reibungskräfte können vernachlässigt werden.

(a) Wie groß ist die Beschleunigung des Malers und des Stuhls ?

Die Newtonschen Bewegungsgleichung für den Fensterputzer lautet

$$Ma_1 = -Mg + F_N + F_S \quad (3)$$

mit $M = 81$ kg, $F_N = 450$ N = $m'g$ und Seilkraft F_S . Rechnen wir mit $g = 10$ m/s erhalten wir $m' = 45$ kg. Die Newtonschen Bewegungsgleichung für den Stuhl lauten

$$ma_2 = -mg - F_N + F_S \quad (4)$$

mit $m = 13.5$ kg. Der Fensterputzer und der Stuhl werden gleich beschleunigt $a_1 = a_2 \equiv a$ und wir können die Gleichungen auflösen nach a und F_S . Wir erhalten

$$F_S = \frac{m'g(m + M)}{M - m} \quad (5)$$

$$a = g \frac{m - M + 2m'}{M - m}. \quad (6)$$

Wir sehen, dass der Fensterputzer den Stuhl nur hochziehen kann, solange $M > m$ gilt. Die Beschleunigung a hängt dabei davon ab wie stark er am Seil zieht. Mit den angegebenen numerischen Werten erhalten wir

$$a = \frac{g}{3} \quad (7)$$

$$F_S = 63g = 630\text{N}. \quad (8)$$

- (b) Wie groß ist die Gesamtkraft, die von der Seilrolle am oberen Ende gehalten wird ?
Die Gesamtkraft F_G die von der Seilrolle gehalten wird lautet

$$F_G = 2F_S = 1260\text{N}. \quad (9)$$

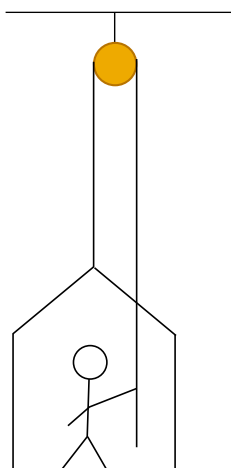


Abbildung 1: Fensterputzer im Seemannsstuhl.

3. Getriebener harmonischer Oszillator (15 + 10 = 25 Punkte)

Betrachten Sie den getriebenen harmonischen Oszillators im schwach gedämpften Fall $\gamma/2 < \omega_0$, beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f \cos(\Omega t) \quad (10)$$

für den Resonanzfall, dem er mit $\Omega = \omega_0$ getrieben wird. Die Anfangsbedingungen seien $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = 0$.

- (a) Geben Sie die allgemeine Lösung $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, die aus homogener $x_h(t)$ und partikulärer Lösung $x_p(t)$ besteht, als Funktion von γ, f und ω_0 für die gegebenen Anfangsbedingungen an.

Die homogene Lösung lautet aufgrund des charakteristischen Polynoms $D^2 + \gamma D + \omega_0^2 = 0$ (siehe Skript)

$$x_h(t) = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\tilde{\omega}_0 t) + Be^{-\gamma t/2} \sin(\tilde{\omega}_0 t) \quad (11)$$

mit $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$. Die Grösse $\tilde{\omega}_0$ entspricht Ω im Skript. Hier bezeichnet Ω die Frequenz der treibenden Kraft, die im Skript mit ω bezeichnet ist. Die partikuläre Lösung lautet mit dem Ansatz $x_p(t) = \text{Re}A(\Omega)e^{i\Omega t}$ (siehe Skript)

$$x_p(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \alpha(\Omega)) \quad (12)$$

mit

$$A(\Omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega} = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) - i\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2} \quad (13)$$

und

$$\alpha(\Omega) = \frac{\operatorname{Im} A(\Omega)}{\operatorname{Re} A(\Omega)} = -\tan^{-1} \frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (14)$$

Wir treiben das System genau auf der Resonanz, damit ist die Phasenverschiebung $\alpha(\Omega = \omega_0) = -\frac{\pi}{2}$ und $x_p(t) = \frac{f}{\gamma\Omega} \sin(\Omega t)$. Wir bestimmen nun die Konstanten A und B aus den Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ zu

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (15)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B\tilde{\omega}_0 + \frac{f}{\gamma} = 0 \Rightarrow B = -\frac{f}{\gamma\tilde{\omega}_0}. \quad (16)$$

Wir finden also als Lösung, die die Randbedingungen erfüllt

$$x(t) = -\frac{f}{\gamma\tilde{\omega}_0} e^{-\gamma t/2} \sin(\tilde{\omega}_0 t) + \frac{f}{\gamma\Omega} \sin(\Omega t). \quad (17)$$

- (b) Nehmen Sie nun an, dass $f = \sqrt{2}\omega_0^2$ und $\omega_0 = \sqrt{2}\gamma$. Berechnen Sie die homogene und die partikuläre Lösung für diesen Fall. Zeichnen Sie qualitativ die Auslenkungsfunktionen $x(t)$, $x_h(t)$ sowie $x_p(t)$ als Funktion von γt für $\gamma t \in [0, 5]$ indem Sie die Funktionen für einige Punkte auswerten und eine Kurve durch diese Punkte legen. Sie dürfen natürlich auch einen Computer zum Zeichnen der Kurve verwenden. Für die angegebenen Werte erhalten wir

$$x(t) = -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} e^{-\gamma t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\gamma t\right) + 2 \sin(\sqrt{2}\gamma t). \quad (18)$$

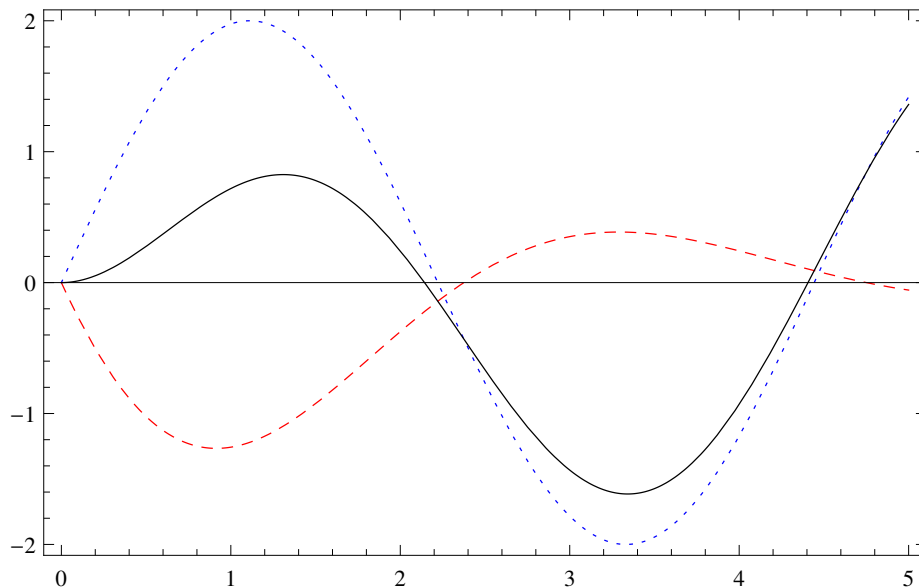


Abbildung 2: Oszillationen zu Aufgabe 3c, wobei $x_h(t)$ (rot, gestrichelt), $x_p(t)$ (blau, gepunktet) und $x(t)$ (schwarz) entspricht.

4. Raketenstart

(5 + 5 + 10 + 5 + 5 + 10 = 40 Punkte)

Betrachten Sie die Trajektorie einer Rakete, deren Gesamtmasse $M(t) = m_0 + m(t)$ sich aus einem zeitlich konstanten Teil m_0 und der zeitabhängigen Treibstoffmasse $m(t)$ zusammensetzt. Die Rakete stößt mit einer konstanten Rate $\dot{m} = -m_0/\tau$ einen Strom von heißem Gas mit einer zeitlich konstanten Relativgeschwindigkeit v_r (gemeint ist relativ zur Rakete) nach hinten aus. Der Rückstoß des Gases übt auf die Rakete eine Schubkraft aus. Alle anderen Kräfte können im Weltall fern aller größeren Himmelskörper vernachlässigt werden.

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Rakete auf.

Die Raketengleichung lautet

$$M\dot{v} = -v_r\dot{m} \quad (19)$$

wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit der Rakete bezeichnet und $M(t) = m_0 + m(t)$. Im allgemeinen gibt es keinen Zusammenhang zwischen dem konstanten Teil des Raketengewichts m_0 und der Rate mit der der Treibstoff aus der Rakete ausströmt. Diese Rate wurde auf dem Übungsblatt auch mit m_0 bezeichnet. Hier in der Musterlösung bezeichne ich sie mit $\tilde{m}_0$ um den allgemeineren Fall zu betrachten.

- (b) Bestimmen Sie $m(t)$ aus $\dot{m} = -m_0/\tau$ mit Anfangsbedingung $m(0) = m_0$.

Wir erhalten durch Integration

$$m(t) = \tilde{m}_0(1 - t/\tau). \quad (20)$$

Bringen Sie dann die Raketengleichung in die Form

$$\dot{v}(t) = \frac{v_r}{\kappa - t}, \quad (21)$$

wobei κ zu bestimmen ist.

Eine einfache Umformung ergibt

$$\kappa = \frac{m_0 + \tilde{m}_0}{\tilde{m}_0}\tau. \quad (22)$$

- (c) Bestimmen Sie $v(t)$ wiederum durch Separation der Variablen.

Die Geschwindigkeit errechnet sich zu

$$v(t) = -v_r \ln\left(1 - \frac{t}{\kappa}\right) \quad (23)$$

wobei wir $v(0) = 0$ als Anfangsbedingung verwendet haben.

- (d) Für $t \geq \tau$ bleibt $v(t)$ konstant in der Zeit, da der Treibstoff aus der Rakete ausströmt ist. Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit $v(\tau)$.

Die Endgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$v(\tau) = -v_r \ln\left(\frac{m_0}{m_0 + \tilde{m}_0}\right). \quad (24)$$

- (e) Berechnen Sie die Trajektorie der Rakete $x(t)$ mit $\dot{x}(t) = v(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

Die Trajektorie der Rakete lautet

$$x(t) = \int_0^t ds v(s) = -v_r \int_0^t ds \ln\left(1 - \frac{s}{\kappa}\right) = \kappa v_r \int_1^{1-t/\kappa} dy \ln y \quad (25)$$

$$= \kappa v_r \left[\left(1 - \frac{t}{\kappa}\right) \ln\left(1 - \frac{t}{\kappa}\right) + \frac{t}{\kappa} \right]. \quad (26)$$

- (f) Berechnen und interpretieren Sie das Verhalten von $x(t)$ und $v(t)$ für kurze Zeiten $t/\tau \ll 1$ indem Sie $x(t)$ und $v(t)$ in eine Taylorreihe bis zur niedrigsten nicht-verschwindenden Ordnung entwickeln.

$$x(t) \approx \frac{1}{2} \frac{v_r}{\kappa} t^2 \quad (27)$$

$$v(t) \approx \frac{v_r t}{\kappa} . \quad (28)$$

Dies entspricht genau $x(t) \approx \frac{1}{2}$ (Anfangsbeschleunigung) t^2 sowie $v(t) \approx \frac{\text{Anfangskraft}}{\text{Anfangsmasse}} t$, so dass es für kleine t reicht mit der Anfangsbeschleunigung zu rechnen, ohne die Zeitabhängigkeit zu berücksichtigen.