

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 12, 100 Punkte
Abgabe 31.01.2014

1. Trajektorie in invertiertem Quadratpotential (20 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung besprochen, dass die Erhaltung der Energie

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \quad (1)$$

mit $E \geq V(x)$ nach Separation der Variablen zur Integration der Bewegungsgleichung verwendet werden kann.

Berechnen Sie die Trajektorie $x(t)$ für das Potential $V(x) = -\frac{k}{2}x^2$ für die Anfangswerte $x(t=0) = 0$ und $v(t=0) = v_0$ und skizzieren Sie $x(t)$.

Die Methode der Separation der Variablen ergibt (siehe Vorlesungsskript)

$$\int_0^t dt' = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}}. \quad (3)$$

Mit $V(x) = -\frac{k}{2}x^2$ erhalten wir

$$t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{k}{2E}x^2}} \stackrel{y=\sqrt{k/2E}x}{=} \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\sqrt{k/2E}x(0)}^{\sqrt{k/2E}x(t)} \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}}. \quad (4)$$

Wir lösen das Integral durch Substitution $y = \sinh(z)$ unter Verwendung des Additionstheorems für hyperbolische Funktionen $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \int_{\sinh^{-1}(y_0)}^{\sinh^{-1}(y_1)} dz = \sinh^{-1}(y_1) - \sinh^{-1}(y_0). \quad (5)$$

Da zu Beginn $x(0) = 0$ und $\sinh^{-1}(0) = 0$ erhalten wir schliesslich

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \sinh^{-1} \left[\sqrt{\frac{k}{2E}} x(t) \right] \Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sinh \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right]. \quad (6)$$

Die Konstante E ergibt sich aus der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ zu $E = \frac{m}{2}v_0^2$ und die Trajektorie mit den gegebenen Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $v(0) = v_0$ lautet also

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \sinh \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right]. \quad (7)$$

2. Wellenphasen (20 Punkte)

Eine Welle bewege sich entlang einer geraden Linie. Der Abstand zwischen zwei Punkten gleicher Phase sei $l_e = 5$ m, der Abstand zwischen zwei Punkten entgegengesetzter Phase sei $l_o = 1.5$ m. Bestimmen Sie alle möglichen Wellenlängenwerte λ und skizzieren Sie

die Lösung mit der längsten Wellenlänge. Fügen Sie dabei die Abstände l_e und l_o in Ihrer Skizze explizit ein.

Die Welle ist beschrieben durch eine periodische Funktion wie $f(x) = \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)$ wobei λ die Wellenlänge der Welle beschreibt. Die beiden Bedingungen im lassen sich mathematisch ausdrücken als

$$f(x) = f(x + l_e) \Rightarrow \frac{2\pi l_e}{\lambda} = 2\pi n, n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

$$f(x) = -f(x + l_o) \Rightarrow \frac{2\pi l_o}{\lambda} = \pi(2n + 1), n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Wir haben ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass $n, m > 0$ da wir auch $l_e, l_o > 0$ annehmen. Auflösen nach λ ergibt die Bedingung

$$\lambda = \frac{l_e}{n} = \frac{2l_o}{2m + 1} \quad (10)$$

mit $n, m \in \mathbb{N}$. Dies bedeutet dass nur gewisse ganze Zahlen n, m möglich sind, nämlich genau solche die die folgende Relation erfüllen

$$\frac{n}{2m + 1} = \frac{l_e}{2l_o} = \frac{5}{3}. \quad (11)$$

Anders ausgedrückt

$$n = \frac{5}{3}(2m + 1) \quad (12)$$

d.h. $2m + 1$ muß durch 3 teilbar sein, damit n eine ganze Zahl ist. Möglich sind daher $m = 3k, 3k + 1, 3k + 2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und einsetzen ergibt, dass nur die Form $m = 3k + 1$ die Bedingung dass $2m + 1 = 6k + 3$ durch 3 teilbar ist erfüllt. Wir erhalten also, dass mögliche Werte n lauten

$$n = \frac{5}{3}(6k + 3) = 5(2k + 1) = 5, 15, 25, \dots \quad (13)$$

mit $k \in \mathbb{N}$. Mögliche Wellenlängen, die die beiden Bedingungen erfüllen sind also

$$\lambda = \frac{l_e}{n} = \frac{1}{2k + 1} \text{ m} \quad (14)$$

mit $k = 0, 1, 2, \dots$. Die längste Wellenlänge lautet demnach $\lambda = 1$ m.

3. Reelle Fourierreihen

(10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

Jede periodische Funktion $f(t)$ mit Periode $T > 0$ kann als Fourierreihe entwickelt werden

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t) \right) \quad (15)$$

mit $\omega = 2\pi/T$ und Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \cos(\omega n t) \quad (16)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \sin(\omega n t). \quad (17)$$

Hier haben wir angenommen, dass die Funktion $f(t)$ im Intervall $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ definiert ist und von dort periodisch auf ganz $t \in \mathbb{R}$ fortgesetzt wird.

Die genauen Konvergenzeigenschaften einer Fourierreihe wird durch den Satz von Dirichlet beschrieben: die reelle Funktion $f(t)$ sei periodisch mit Periode $T > 0$. Die Funktion sei im Intervall $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ injektiv, habe dort eine endliche Anzahl von Minima und Maxima sowie eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten. Falls das Integral $\int_{-T/2}^{T/2} dt |f(t)|$ endlich ist, dann konvergiert die Fourierreihe (??) punktweise gegen die Funktion $f(t)$ für alle Werte von t an denen $f(t)$ stetig ist. An den Unstetigkeitspunkten t_i konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelpunkt des Unstetigkeitssprungs $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2}[f(t_i - \epsilon) + f(t_i + \epsilon)]$.

Die folgenden Funktionen sind auf einem endlichen Intervall definiert und seien periodisch für alle $t \in \mathbb{R}$ fortgesetzt. Skizzieren Sie die folgenden Funktionen über 3 periodische Intervalle und berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_n und b_n :

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t < 0, \\ 0, & 0 < t < \pi. \end{cases} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1} \quad (18)$$

$$f_2(t) = 1 + t, \quad -\pi < t < \pi = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt), \quad (19)$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0, \\ \sin(t), & 0 < t < \pi. \end{cases} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{1 - (2n)^2} \quad (20)$$

Wir zeigen einen Plot der Fourierreihen mit verschiedenen vielen Gliedern N und die exakte Funktion in Abb. ??.

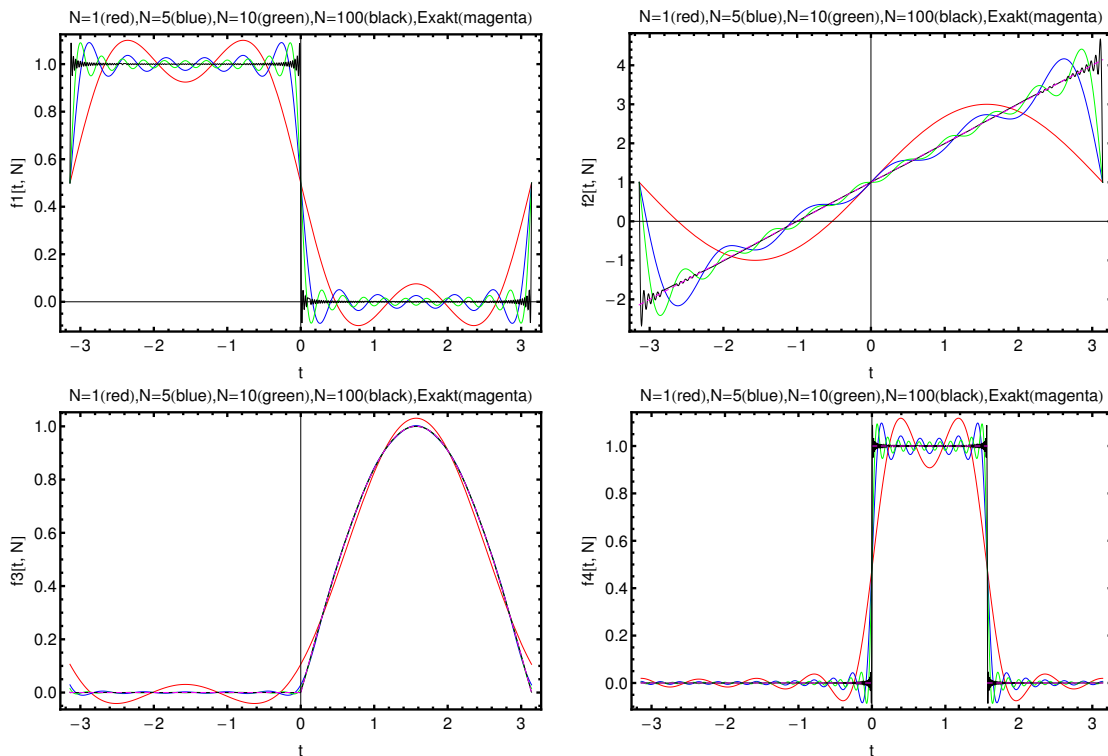


Abbildung 1: Funktionen $f_{1,2,3,4}(t)$ und Fourierreihenapproximationen dieser Funktionen mit endlich vielen Gliedern N (wie angegeben).

4. Komplexe Fourierreihen

(10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

Die komplexe Darstellung der Fourierreihenentwicklung einer periodischen Funktion $f(t)$ mit Periode T lautet

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t} \quad (21)$$

mit $\omega = 2\pi/T$ und komplexen Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) e^{-i\omega n t}. \quad (22)$$

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_n für die Funktionen

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t < 0, \\ 0, & 0 < t < \pi. \end{cases} = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2k+1)t}}{2k+1} \quad (23)$$

$$f_4(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0, \\ 1, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} + \frac{i}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{4k+2} \left[e^{-i(4k+2)t} - e^{i(4k+2)t} \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{4k+1} \left[(-i-1)e^{i(4k+1)t} + (-i+1)e^{-i(4k+1)t} \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{4k+3} \left[(i-1)e^{i(4k+3)t} + (i+1)e^{-i(4k+3)t} \right] \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

Einen Plot der Funktion f_4 sowie der Fourierreihenentwicklung mit endlich vielen Gliedern ist in Abb. ?? gezeigt.

(b) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten $\{a_n, b_n\}$ und $\{c_n\}$. Drücken Sie dabei sowohl a_n und b_n durch c_n und c_{-n} aus als auch den inversen Zusammenhang, d.h. drücken Sie c_n und c_{-n} durch a_n und b_n aus.

Vergleichen wir reelle und komplexe Fourierreihenentwicklung, so können wir die Relation zwischen den Koeffizienten einfach ablesen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t) \right) \quad (26)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{2} (e^{i\omega n t} + e^{-i\omega n t}) + b_n \frac{1}{2i} (e^{i\omega n t} - e^{-i\omega n t}) \right) \quad (27)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{i\omega n t} + c_{-n} e^{-i\omega n t} \right). \quad (28)$$

Die reellen Koeffizienten lauten also ausgedrückt durch die komplexen

$$a_0 = 2c_0 \quad (29)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad (30)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}). \quad (31)$$

Die komplexen Koeffizienten lassen sich durch die reellen ausdrücken als

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (32)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (33)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (34)$$

Verifizieren Sie diesen Zusammenhang explizit für die Koeffizienten der Funktion $f_1(t)$, die Sie ja sowohl in eine komplexe als auch in eine reelle Fourierreihe entwickelt haben.

Im expliziten Beispiel der Funktion $f_1(t)$ hatten wir erhalten $a_0 = 1$, $a_n = 0$ für $n \geq 1$ sowie $b_{2k} = 0$ und $b_{2k+1} = -2/\pi(2k+1)$ für $k \geq 1$. Die komplexen Koeffizienten hatten sich zu $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_{2k} = 0$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $c_{2k+1} = i/\pi(2k+1)$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Setzen wir diese Ergebnisse in die obigen Relationen ein, so sehen wir dass diese erfüllt sind.

- (c) Zeigen Sie dass im Falle einer reellen Funktion $f(t) \in \mathbb{R}$ die komplexen Fourierkoeffizienten die Relation $c_{-n} = c_n^*$ erfüllen.

Wenn $f(t) \in \mathbb{R}$ reell ist, so folgt $f(t) = f(t)^*$ und damit direkt

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t} = f(t)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-i\omega n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{i\omega n t}, \quad (35)$$

wobei wir im letzten Schritt den Summationsindex $n \rightarrow -n$ umbenannt haben, was natürlich nur einer Umordnung von Termen in der Summe entspricht. Vergleichen wir die Koeffizienten, so folgt sofort

$$c_n = c_{-n}^* \Leftrightarrow c_n^* = c_{-n} \quad (36)$$

was zu zeigen war. Für die Relationen zwischen den reellen und komplexen Fourierkoeffizienten ergibt sich im Falle einer reellen Funktion $f(t)$ daher $a_n = 2\operatorname{Re}(c_n)$ und $b_n = -2\operatorname{Im}(c_n)$.