

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Blatt 13, 100 Punkte
Abgabe und Besprechung, 07.02.2014

1. Exzentrizität der Erdumlaufbahn (20 Punkte)

Die Exzentrizität der Erdumlaufbahn beträgt $\epsilon = 0.0167$. Bestimmen Sie das Verhältnis der maximalen Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Umlaufbahn zu ihrer minimalen Geschwindigkeit.

Die Ellipsengleichung lautet (siehe Abb. **abb**)

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (1)$$

mit $p = a(1 - \epsilon^2)$ und Exzentrizität $\epsilon = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz gilt, dass

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{2} = \text{const.} \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = h. \quad (2)$$

Die Geschwindigkeit des Planeten in der Polarkoordinatenbasis $\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ und $\mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ lautet nach $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ja

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta. \quad (3)$$

Der Betrag der Geschwindigkeit also

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}. \quad (4)$$

Berechnen wir zuerst $\dot{r}$:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{p\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \dot{\theta} = \frac{r^2 \epsilon \sin \theta}{p} \dot{\theta}. \quad (5)$$

Verwenden wir nun, dass nach Gl. (2) gilt dass $h = r^2 \dot{\theta}$, so erhalten wir

$$\dot{r} = \frac{h\epsilon \sin \theta}{p}. \quad (6)$$

Für den zweiten Term in Gl. (4) erhalten wir

$$r\dot{\theta} = \frac{h}{r} = \frac{h(1 + \epsilon \cos \theta)}{p}. \quad (7)$$

Dies ergibt schliesslich für $|\mathbf{v}|$ das Ergebnis

$$|\mathbf{v}| = \frac{h}{p} \sqrt{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta}. \quad (8)$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist also maximal für $\theta = 0$, also wenn der Planet der Sonne am nächsten kommt. Er ist minimal für $\theta = \pi$, also wenn der Planet den grössten Abstand zur Sonne besitzt.

Das Verhältnis von maximaler zu minimaler Geschwindigkeit ergibt sich zu

$$\frac{|\mathbf{v}|_{\max}}{|\mathbf{v}|_{\min}} = \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon}}{\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon}} = 1.03397, \quad (9)$$

mit Exzentrizität $\epsilon = 0.0167$.

2. Umlaufzeit eines Satelliten

(10 + 10 = 20 Punkte)

Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit eines in der Höhe h über der Erdoberfläche auf einer kreisförmigen Bahn umlaufenden Satelliten. Welche Umlaufzeit erhalten Sie für $h = 2 \cdot 10^5$ m. Der Erdradius beträgt $R_E = 6.37 \cdot 10^6$ m.

Auf der Bahn des Satelliten gilt dass die Zentripetalbeschleunigung des Satelliten gleich der Gravitationsbeschleunigung ist, also

$$r\omega^2 = GM/r^2 \quad (10)$$

gilt. Hier bezeichnet $r = R_E + h$ den Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt und M ist die Erdmasse. Wir können das Ergebnis auch approximieren, indem wir verwenden dass $GM/R_E^2 = g = 9.81$ m/s und dann eine Taylorentwicklung in h durchführen. Hier setzen wir aber einfach Erdmasse und Erdradius ein und erhalten

$$\omega = \frac{\sqrt{GM}}{(R_E + h)^{3/2}} = 1.167 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s}. \quad (11)$$

Für die Periode ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 5383 \text{ s} = 89.71 \text{ min}. \quad (12)$$

3. Gummizug

(10 + 10 = 20 Punkte)

Ein Körper der Masse $m = 1$ kg liege auf einer horizontalen und reibungsfreien Oberfläche. Wie in Abbildung 1 dargestellt sei an einer Seitenfläche ein dünnes Gummiband am Punkt a befestigt, dessen ungedehnte Länge $l = 50$ cm sei. Für Zeiten $t \leq 0$ werde das andere Ende des Gummibandes am Punkt b rechts davon horizontal im Abstand l von a gehalten. Das Gummiband ist also anfänglich ungedehnt. Das Gummiband wirke falls es gedehnt ist wie eine Feder mit Federkonstante $D = 100$ N/m, allerdings nur im gedehnten Zustand. Im komprimierten Zustand übt es keinerlei Kraft aus.

Für $t > 0$ werde das Ende des Gummibandes bei b mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 1$ m/s horizontal nach rechts gezogen.

- (a) Bestimmen Sie den maximalen Abstand der Punkte a und b solange sich noch a links von b befindet, d.h. bevor der Körper den sich bewegenden Punkt b eingeholt hat.

Wir lösen die Aufgabe im Bezugssystem K' in dem der Punkt b in Ruhe ist. Dieses System ist mit dem Laborsystem K über eine Galileitransformation $x' = x - v_0 t$ und $t' = t$ verbunden. In K' bewegt sich die Masse m anfänglich bei $t = 0$ mit Geschwindigkeit $-v_0$ (also nach links). In K' vollzieht die Masse m eine halbe Oszillation, also vom Ursprung $x' = 0$ zum maximalen Abstand von b bei x'_0 und dann zurück zu $x' = 0$. Zu diesem Zeitpunkt besitzt die Masse dann die Geschwindigkeit v_0 (also nach rechts) und da das Gummiband keinerlei Kraft ausübt wenn es komprimiert ist, so wird sich die Masse von da an mit konstanter Geschwindigkeit v_0 nach rechts bewegen (in K').

Die Amplitude der Oszillation x'_0 ergibt sich einfach aus Energieerhaltung

$$\frac{m}{2} v_0^2 = \frac{D}{2} x_0'^2 \Rightarrow x'_0 = \sqrt{\frac{m}{D}} v_0 = 0.1 \text{ m}. \quad (13)$$

Im Laborsystem ist der maximale Abstand der Masse vom Punkt b dann gegeben durch

$$L = l + x'_0 = 0.6 \text{ m}. \quad (14)$$

- (b) Wie lange benötigt der Körper um den sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 nach rechts bewegendem Punkt b einzuholen? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Um die Zeit zu berechnen, die die Masse benötigt um den Punkt b einzuholen, benötigen wir die Dauer der halben Oszillation

$$T_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\pi}{10} \text{ s} \quad (15)$$

Hinzu kommt dann noch die Zeit T_2 in der die Masse den Abstand l mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_0 durchläuft

$$T_2 = \frac{l}{v_0} = 0.5 \text{ s} \quad (16)$$

Die Gesamtzeit errechnet sich also zu

$$T = T_1 + T_2 = \pi \sqrt{\frac{m}{D}} + \frac{l}{v_0} = 0.81 \text{ s}. \quad (17)$$



Abbildung 1: Abbildung für Aufgabe 3.

4. Greenfunktion

(20 + 20 = 40 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right) \phi(x) = \rho(x), \quad (18)$$

die für eine vorgegebene Inhomogenität $\rho(x)$ das Verhalten der Funktion $\phi(x)$ bestimmt.

- (a) Die Green-Funktion $G(x)$ der Differentialgleichung (18) erfüllt die Gleichung für die Inhomogenität $\rho(x) = \delta(x)$. Bestimmen Sie die Konstanten B und b in folgendem Ansatz für $G(x)$:

$$G(x) = B e^{-b|x|} = B \{ \theta(-x) e^{bx} + \theta(x) e^{-bx} \}. \quad (19)$$

Hier bezeichnet $\theta(x)$ die Heaviside-Theta Funktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Wir hatten ja bereits gesehen, dass die Ableitung der Heaviside-Theta Funktion die Diracsche Deltafunktion ergibt $\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x)$.

Wir bestimmen die Konstanten B und b durch Einsetzen der Greenfunktion in die Differentialgleichung (18). Wir benötigen dafür die zweite Ableitung der Greenfunktion

$$\frac{d}{dx} G(x) = B \left\{ -\delta(x) e^{bx} + \theta(-x) b e^{bx} + \delta(x) e^{-bx} - \theta(x) b e^{-bx} \right\}. \quad (21)$$

Erneutes Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} G(x) &= B \left\{ -\delta'(x)e^{bx} - \delta(x)be^{bx} - \delta(x)be^{bx} + \theta(-x)b^2e^{bx} + \delta'(x)e^{-bx} \right. \\ &\quad \left. - \delta(x)be^{-bx} - \delta(x)be^{-bx} + \theta(x)b^2e^{-bx} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$= -B\delta(x) \left\{ be^{bx} + be^{-bx} \right\} + b^2 G(x) = -2bB\delta(x) + b^2 G(x), \quad (23)$$

wobei wir verwendet haben, dass wir die Ableitung der δ -Funktion auf die Funktion die mit der δ -Funktion multipliziert wir umzuwälzen $\delta'(x)f(x) = -\delta(x)f'(x)$.

Setzen wir das Ergebnis von Gl. (23) in Gl. (18) ein, so bekommen wir

$$(b^2 - \lambda^2)G(x) = \delta(x)(1 + 2Bb). \quad (24)$$

Die Gleichung ist also erfüllt für die Konstanten

$$b = \pm\lambda \quad (25)$$

$$B = -\frac{1}{2b} = \mp \frac{1}{2\lambda}. \quad (26)$$

Fordern wir noch, dass die Funktion im Unendlichen nicht gegen unendlich gehen soll, so muss $b = \lambda$ und $B = -1/2\lambda$ gelten.

- (b) Bestimmen Sie nun mit Hilfe von $G(x)$ die Funktion $\phi(x)$ im Bereich $x > a$ für den Fall

$$\rho(x) = \rho_0 \theta(x+a) \theta(a-x). \quad (27)$$

Die Funktion $\phi(x)$ für die gegebene Inhomogenität errechnet sich mit Hilfe der Greenfunktion zu

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x-x') \rho(x') = \rho_0 \int_{-a}^a G(x-x') = -\frac{\rho_0}{2\lambda} e^{-\lambda x} \int_{-a}^a dx' e^{bx'} \quad (28)$$

$$= -\frac{\rho_0}{2\lambda^2} e^{-\lambda x} (e^{\lambda a} - e^{-\lambda a}) = -\frac{\rho_0}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \sinh(\lambda a). \quad (29)$$

für $x > a$.