Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2014

Übungsblatt 2

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. M. Spinrath, Dr. S. Schacht

Abgabe: 31.10.2014
Besprechung: 7.11.2014

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es um die Anwendung der partiellen Integration (Gleichung 3 der Vorlesung). Betrachten Sie die Funktionen $I_n(x) = \int_0^x dy y^n \exp(y)$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie $I_0(x)$.

b) (2 Punkte) Drücken Sie (für $n \geq 1$) $I_n(x)$ durch $I_{n-1}(x)$ aus. (So eine Gleichung nennt man *Rekursionsformel*.)

c) (1 Punkt) Berechnen Sie $I_1(x)$, $I_2(x)$ und $I_3(x)$.

d) (1 Punkt) Berechnen Sie $I_n(x)$. (D.h. lösen Sie die Rekursion.) Hinweis: Eine nützliche Notation ist das *Pochhammer-Symbol* $(a)_n := a \cdot (a+1) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)$, wobei $(a)_0 := 1$. Erraten Sie die Lösung für $I_n(x)$ und zeigen Sie, dass die Rekursionsformel erfüllt ist und $I_0(x)$ für $n = 0$ korrekt herauskommt. Diese Beweismethode heißt *vollständige Induktion*.

Aufgabe 4: Wir suchen die Lösung $y(x)$ folgender Gleichnung: $\frac{dy}{dx} = f(x)y(x)$, wobei $f(x)$ eine beliebige stetige reelle Funktion ist. Wir beschränken uns auch auf Lösungen, in denen $y(x)$ reell ist. (Man nennt diese Art Gleichung *Differentialgleichung*.)

a) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass $y(x)$ auf dem Intervall $[x_0, x_1]$ (streng) monoton ist und keine Nullstellen hat. Vereinfachen Sie in

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \frac{1}{y(x)} \frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x_1} dx f(x)$$

die linke Seite durch Substitution so, dass Sie das Integral ausführen können. Hinweis: Betrachten Sie die Umformungen der Gl. 10 der Vorlesung.

b) (1 Punkt) Drücken Sie $y(x)$ durch eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ aus.

c) (1 Punkt) Welches $y(x)$ erfüllt die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \lambda x^\alpha y(x)$, wobei $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist? Hinweis: Integrationskonstante nicht vergessen!

d) (1 Punkt) Welches $y(x)$ erfüllt die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \exp(\alpha x) y(x)$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist?