Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2014

Übungsblatt 6

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. M. Spinrath, Dr. S. Schacht

Abgabe: 12.12.2014
Besprechung: 19.12.2014

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 11: Abrollkurve

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Punktes P, der im Abstand a von der Drehachse mit einem auf einer Eisenbahnschiene ($y = 0$) rollenden Rad mit Radius R fest verbunden ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Drehachse bei $x = 0$ und der Punkt P genau darunter. Die Geschwindigkeit des Radmittelpunkts sei konstant gleich $\vec{v}_M = (v, 0)$.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie: Falls $a = R$ ist, gibt es Zeitpunkte t_n, bei denen die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ des Punktes P verschwindet, die Steigung dy/dx der Bahnkurve aber unendlich ist. Hinweis: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Falls $\lim\limits_{t\to t_n} \dfrac{f(t)}{g(t)}$ einen unbestimmten Ausdruck $\dfrac{0}{0}$ oder $\dfrac{\infty}{\infty}$ ergibt, so ist $\lim\limits_{t\to t_n} \dfrac{f(t)}{g(t)} = \lim\limits_{t\to t_n} \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ (Regel von L'Hôpital).

c) (2 Punkte) Skizzieren Sie die Bahnkurve (i) für $a < R$, (ii) für $a = R$ und (iii) für $a > R$.

Aufgabe 12: Geladenes Teilchen im Magnetfeld: Die Bewegung eines Massenpunktes mit $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ werde durch die Differentialgleichungen

$$\ddot{x} = \omega\dot{y}, \qquad \ddot{y} = -\omega\dot{x}, \qquad \ddot{z} = 0,$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ bestimmt.

a) (1 Punkt) Integrieren Sie die drei Gleichungen über die Zeit, um Differentialgleichungen für $(x(t), y(t), z(t))$ zu finden, in denen keine höheren Ableitungen als $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ vorkommen (Differentialgleichungen 1. Ordnung).

b) (1 Punkt) Um die Projektion der Bahnkurve in die x-y-Ebene zu finden, suchen wir nun eine Differentialgleichung für $y(x)$: Drücken Sie dazu dy/dx durch x und y aus und lösen Sie diese Differentialgleichung. (Wie nennt man diese Kurve?) Hinweis: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie $|\dot{\vec{r}}(t)|$ und geben Sie den Weg an, den der Massenpunkt im Zeitintervall $[0, T]$ zurücklegt.

d) (1 Punkt) Bestimmen Sie nun $\vec{r}(t)$. Dazu dürfen Sie aus Ihrer Kenntnis der Bahnkurve und von $|\dot{\vec{r}}(t)|$ das Ergebnis erraten und in die in a) gefundene Differentialgleichung einsetzen. Falls es mit dem Raten nicht klappt, können Sie z.B. unter Verwendung von $\dot{y} = \dot{x}dy/dx$ und des Ergebnisses aus b) zunächst $y(t)$ und dann $x(t)$ finden. Ihre Lösung sollte sechs unbestimmte Parameter haben.

e) (1 Punkt) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Massenpunkt am Ort $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ und habe die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$. Drücken Sie die Parameter Ihrer Lösung durch die Komponenten von $\vec{v}_0$ aus.