Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2014

Übungsblatt 11

Lösung

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. M. Spinrath, Dr. S. Schacht

Besprechung: Lösung wird online gestellt

Dieses Blatt ist eine Übungsklausur, es ist nicht Teil der Vorleistung. Kontrollieren Sie die Zeit und notieren Sie sich, wie weit Sie in 2 Stunden gekommen sind. Wenn Sie mindestens die Hälfte der Punkte erzielt haben, hätten Sie die Klausur bestanden.
Richtiges Rechnen mit falschem Ansatz gibt keine Punkte.

Aufgabe 1: Drehungen im $\mathbb{R}^3$ (10 Punkte)
$R = R(\vec{\phi})$ bezeichne die Matrix einer Drehung um die Achse $\vec{n} = \vec{\phi}/\phi$ mit dem Winkel $\phi \neq 0$.

a) (5 Punkte) Welche der folgenden Eigenschaften ist (für beliebiges $\vec{\phi} \neq 0$) erfüllt?

i) $R^T R = \mathbb{1}$, ii) $R^T = R$, iii) $R(-\vec{\phi}) = R(\vec{\phi})^T$, iv) $\det R = 1$,
v) Die j-te Spalte steht senkrecht auf der j-ten Zeile für $j = 1, 2, 3$.

Geben Sie bei jeder Eigenschaft an, ob sie richtig oder falsch ist. Ein Beweis oder Gegenbeispiel ist nicht erforderlich.

Lösung:

i) richtig

ii) falsch

iii) richtig

iv) richtig

v) falsch

b) (1 Punkt) Beweisen Sie $\left(R - R^T\right)\vec{n} = 0$.

Lösung:
Wir haben für die Drehachse $\vec{n}$:

$$R\vec{n} = \vec{n} \tag{1}$$
$$\Rightarrow \vec{n} = R^T\vec{n} \tag{2}$$
$$\Rightarrow R\vec{n} = R^T\vec{n} \tag{3}$$
$$\Rightarrow (R - R^T)\vec{n} = 0. \tag{4}$$

c) (4 Punkte)
Betrachten Sie die Drehmatrix

$$R(\vec{\phi} = \phi\vec{n}) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie $\phi \in [0, \pi]$. (1 Punkt)

ii) Bestimmen Sie $\pm\vec{n}$. (Auf die Orientierung von $\vec{n}$ kommt es hier nicht an.) (2 Punkte)

iii) Bestimmen Sie das Vorzeichen von $\vec{n}$ so, dass mit $\vec{e}_x = (1, 0, 0)^T$ die Ungleichung $(R(\vec{\phi})\vec{e}_x \times \vec{e}_x) \cdot \vec{n} > 0$ erfüllt ist. (1 Punkt)

Lösung:

i) Wir haben

$$1 + 2\cos\phi = \mathrm{tr}(R(\vec{\phi})) = 2 \tag{5}$$
$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{2} \tag{6}$$
$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}\,, \tag{7}$$

da $\phi \in [0, \pi]$.

ii) Sei $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$. Wegen $(R - R^T)\vec{n} = 0$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Dieses wird gelöst durch $\vec{n} = \pm(1,1,1)^T/\sqrt{3}$.

iii) Für $\vec{n} = \pm(1,1,1)^T/\sqrt{3}$ haben wir

$$(R(\vec{\phi})\vec{e}_x \times \vec{e}_x) \cdot \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,. \tag{9}$$

Damit gilt in ii) das Plus-Zeichen, d.h. $\vec{n} = (1,1,1)^T/\sqrt{3}$.

Aufgabe 2: Stokes'sche Reibung (10 Punkte)
v sei die z-Komponente der Geschwindigkeit eines Teilchens, auf das die Gewichtskraft und eine Reibungkraft wirken.
a) (4 Punkte) Bestimmen Sie $v(t)$ aus der Bewegungsgleichung

$$\dot{v} \;=\; -g - \alpha v, \qquad \alpha, g > 0, \tag{10}$$

wobei Sie sich auf Lösungen mit $v > -\frac{g}{\alpha}$ beschränken dürfen. Wählen Sie als Integrationskonstante den Zeitpunkt t_0, für den $v(t_0) = 0$ gilt.
Hinweis: Achten Sie darauf, dass das Argument des Logarithmus positiv ist.

Lösung:
Wir lösen dies durch Separation der Variablen. Wir haben

$$\frac{dv}{-g - \alpha v} = dt\,. \tag{11}$$

Wir integrieren dies von t_0 bis t'. Wir wählen $t_0 = 0$.

$$-\int_0^{v(t')} \frac{dv}{g + \alpha v} = \int_0^{t'} dt\,. \tag{12}$$

Es ist $v > -g/\alpha$, d.h. wir haben $g + \alpha v > 0$. Es folgt:

$$\ln\left(1 + \frac{\alpha}{g} v(t')\right) = -\alpha t' \tag{13}$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{\alpha}{g} v(t') = e^{-\alpha t'} \tag{14}$$
$$\Rightarrow v(t') = \frac{g}{\alpha}(e^{-\alpha t'} - 1)\,. \tag{15}$$

Wir benennen jetzt wieder t' in t um:

$$v(t) = \frac{g}{\alpha}(e^{-\alpha t} - 1)\,. \tag{16}$$

b) (2 Punkte) Für $t \to \infty$ konvergiert $v(t)$ gegen eine Grenzgeschwindigkeit v_G. Bestimmen Sie v_G.
Hinweis: Diese Frage können Sie auch beantworten, wenn Sie Teilaufgabe a) nicht gelöst haben.

Lösung:
Wir haben aus obiger Lösung direkt $v_G = -\frac{g}{\alpha}$. Aus Gl. (10) folgt wegen $\dot{v}(t) \to 0$ für $t \to \infty$ ebenfalls $v_G = -\frac{g}{\alpha}$.
c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $z(t)$ für die Anfangsbedingung $z(0) = h$, $v(0) = 0$.

Lösung:
Wir haben

$$\frac{dz}{dt} = \frac{g}{\alpha}(e^{-\alpha t} - 1) \tag{17}$$

also

$$\int_h^{z'(t')} dz = \frac{g}{\alpha}\int_0^{t'} (e^{-\alpha t} - 1)dt \tag{18}$$

$$\Rightarrow z'(t') - h = \frac{g}{\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t'} - t'\right) + \frac{g}{\alpha^2} \tag{19}$$

Nach Umbenennung von z' und t' folgt dann

$$z(t) = \frac{g}{\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} - t\right) + \frac{g}{\alpha^2} + h\,. \tag{20}$$

d) (2 Punkte) Betrachten Sie den Fall $\alpha t \gg 1$ und bestimmen Sie die Zeit t, zu der das Teilchen für $g = 10\frac{m}{s^2}$, $h = 0,1\,m$, $\alpha = 10^3\frac{1}{s}$ bei $z = 0$ angekommen ist.

Lösung:
Für $\alpha t \gg 1$ haben wir

$$z(t) \approx -\frac{g}{\alpha}t + h\,, \tag{21}$$

also ist die gesuchte Zeit gegeben durch

$$t \approx \frac{\alpha}{g}h. \tag{22}$$

Mit eingesetzten Zahlen ergibt sich $t \approx 10s$.
Aufgabe 3: Schraubenlinie (10 Punkte)
Auf ein Teilchen mit Masse m wirke die Kraft

$$\vec{F} \;=\; q\,\dot{\vec{r}} \times \vec{B}, \qquad \vec{B} = B\vec{e}_z \quad \text{mit zeitunabhängigen } q, B > 0. \tag{23}$$

a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ v_0 t \end{pmatrix}, \qquad R, \omega, v_0 > 0. \tag{24}$$

die Newtonschen Bewegungsgleichungen erfüllt, und drücken Sie ω durch q, B und m aus.

Lösung:
Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{25}$$

Wir haben zunächst

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

und dann

$$m\vec{a}(t) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Andererseits haben wir

$$\vec{F} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = q\begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ v_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = qB\omega R\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Damit sind die Newtonschen Bewegungsgleichungen erfüllt, wenn

$$\omega = -\frac{qB}{m}. \tag{29}$$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie $v(t) = |\dot{\vec{r}}(t)|$.

Lösung:
Wir haben

$$v(t) = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}. \tag{30}$$

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie den zurückgelegten Weg $s(t) = \int_0^t dt' v(t')$ und invertieren Sie das Ergebnis, um $t(s)$ zu bestimmen.

Lösung:
Das Integral ergibt

$$s(t) = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2} \cdot t. \tag{31}$$

Die Inversion lautet

$$t(s) = \frac{s(t)}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}. \tag{32}$$

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\tilde{\vec{r}}(s) := \vec{r}(t(s))$ und berechnen Sie den Tangentenvektor $\vec{t}(s) = \frac{d\tilde{\vec{r}}(s)}{ds}$.

Lösung:

Wir haben

$$\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} R\cos\left(\omega \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}\right) \\ R\sin\left(\omega \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}\right) \\ v_0 \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Der Tangentenvektor ist folglich

$$\vec{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}} \begin{pmatrix} -R\omega\sin\left(\omega \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}\right) \\ R\omega\cos\left(\omega \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2}}\right) \\ v_0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Aufgabe 4: Coriolis- und Zentrifugalkraft (10 Punkte)
Der Ort $\vec{r}$ eines Flugzeugs sei durch die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ bestimmt. Das Flugzeug fliege mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = v_{\text{Süd}}\vec{e}_\theta + v_{\text{Ost}}\vec{e}_\phi$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$.

a) (2 Punkte) Beweisen Sie die Beziehung

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta. \tag{35}$$

Lösung:
Wir setzen ein:

$$\vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}\cos\theta - \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}\sin\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z. \tag{36}$$

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Coriolisbeschleunigung

$$\vec{a}_C = -\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}, \tag{37}$$

die auf das Flugzeug wirkt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Kugelkoordinaten, also in der Form $\vec{a}_C = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\phi\vec{e}_\phi$ an.

Wir haben

$$-\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = -\omega\left(v_{\text{Süd}}\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta + v_{\text{Ost}}\vec{e}_z\times\vec{e}_\phi\right). \tag{38}$$

Jetzt setzen wir die Relation aus a) ein:

$$\begin{aligned} -\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} &= -\omega v_{\text{Süd}}\left(\cos\theta\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta - \sin\theta\vec{e}_\theta\times\vec{e}_\theta\right) \\ &\quad - \omega v_{\text{Ost}}\left(\cos\theta\vec{e}_r\times\vec{e}_\phi - \sin\theta\vec{e}_\theta\times\vec{e}_\phi\right) \end{aligned} \tag{39}$$

Die Ergebnisse für die obigen Kreuzprodukte können aus der Formelsammlung entnommen werden. Es folgt:

$$-\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = -\omega v_{\text{Süd}}\cos\theta\vec{e}_\phi - \omega v_{\text{Ost}}\left(-\cos\theta\vec{e}_\theta - \sin\theta\vec{e}_r\right) \tag{40}$$

$$= \omega v_{\text{Ost}}\sin\theta\vec{e}_r + \omega v_{\text{Ost}}\cos\theta\vec{e}_\theta - \omega v_{\text{Süd}}\cos\theta\vec{e}_\phi\,. \tag{41}$$

c) (3 Punkte) Berechnen Sie analog die Zentrifugalbeschleunigung

$$\vec{a}_Z = -\vec{\omega}\times(\omega\times\vec{r}). \tag{42}$$

Lösung:
Wir haben

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \,. \tag{43}$$

Wir haben dann zunächst

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \times \vec{r} &= (\omega\vec{e}_z \times r\vec{e}_r) && (44)\\
&= \omega r\vec{e}_z \times \vec{e}_r && (45)\\
&= \omega r\left[(\vec{e}_r\cos\theta - \sin\theta\vec{e}_\theta) \times \vec{e}_r\right] && (46)\\
&= -\omega r\sin\theta(\vec{e}_\theta \times \vec{e}_r) && (47)\\
&= \omega r\sin\theta\vec{e}_\phi \,. && (48)
\end{aligned}$$

Damit haben wir dann

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} &= \vec{\omega} \times (\omega r\sin\theta\vec{e}_\phi) && (49)\\
&= \omega^2 r\sin\theta(\vec{e}_z \times \vec{e}_\phi) && (50)\\
&= \omega^2 r\sin\theta\left[(\vec{e}_r\cos\theta - \sin\theta\vec{e}_\theta) \times \vec{e}_\phi\right] && (51)\\
&= -\omega^2 r\left(\sin\theta\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin^2\theta\vec{e}_r\right) \,. && (52)
\end{aligned}$$

d) (2 Punkte) Betrachten Sie das Zahlenbeispiel mit $v_{\text{Süd}} = 0$, $v_{\text{Ost}} = 250\frac{m}{s}$, $\theta = 45°$, $r = 6,4 \cdot 10^6 m$ und $\omega = \frac{3}{4} \cdot 10^{-4}\frac{1}{s}$: Wie groß sind die Südkomponenten $\vec{e}_\theta \cdot \vec{a}_c$ und $\vec{e}_\theta \cdot \vec{a}_Z$? Es reicht aus, wenn Sie das Ergebnis auf zwei signifikante Stellen angeben.

Lösung:
Wir haben für die Südkomponenten

$$\begin{aligned}
\vec{e}_\theta \cdot \vec{a}_C &= \omega v_{\text{Ost}}\cos\theta && (53)\\
\vec{e}_\theta \cdot \vec{a}_Z &= -\omega^2 r\sin\theta\cos\theta && (54)
\end{aligned}$$

Für $\theta = \pi/4$ ist $\cos\pi/4 = \sin\pi/4 = 1/\sqrt{2}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\vec{e}_\theta \cdot \vec{a}_C &= \omega v_{\text{Ost}}/\sqrt{2} \approx 0.013\frac{m}{s^2} \,, && (55)\\
\vec{e}_\theta \cdot \vec{a}_Z &= -\omega^2 r/2 \approx 0.018\frac{m}{s^2} \,. && (56)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Kepler-Problem (10 Punkte)
Ein Asteroid mit Masse m umkreise die Sonne auf einer elliptischen Bahn. Die Bahnkurve ist in ebenen Polarkoordinaten r,θ durch

$$r(\theta) = \frac{l^2}{\mu\alpha(1 + \epsilon\cos\theta)}$$

gegeben, wobei μ die reduzierte Masse und l den Betrag des Drehimpulses bezeichnet. Die potentielle Energie ist $U(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$. Die kartesischen Koordinaten sind gegeben durch $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

a) (2 Punkte) Drücken Sie μ durch m und die Sonnenmasse M aus. Entwickeln Sie μ zur ersten Ordnung in m/M.

Lösung:

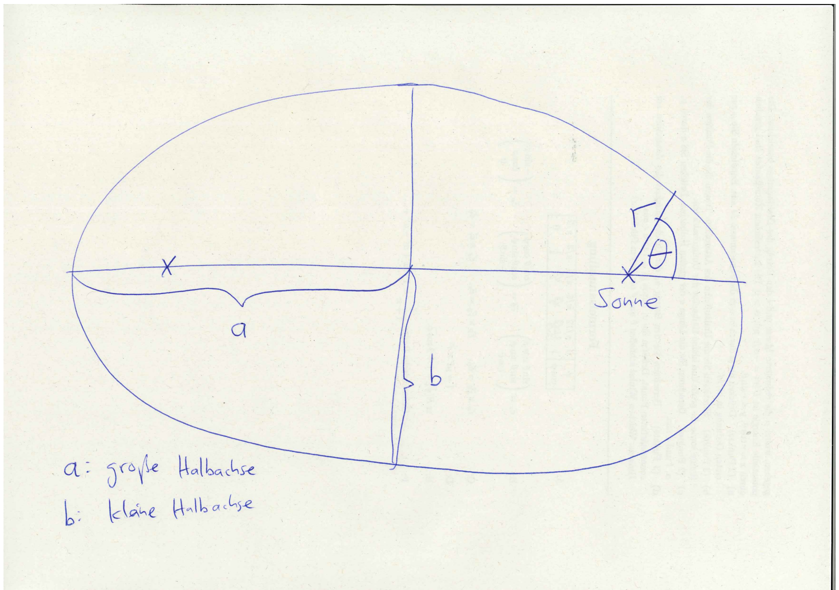

Abbildung 1: Skizze.

Wir haben

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = m\frac{M}{m+M} = m\frac{1}{1+\frac{m}{M}} \approx m\left(1 - \frac{m}{M}\right) . \tag{57}$$

b) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Umlaufbahn des Asteroiden. Tragen Sie die Position der Sonne sowie die große und kleine Halbachse der Umlaufbahn ein.

Lösung:
Für Ellipsen haben wie $0 < \varepsilon < 1$. r ist am kleinsten, wenn $\theta = 0$ und am größten, wenn $\theta = \pi$. Eine Skizze ist in Abb. 1 zu finden.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Länge a der großen Halbachse. Drücken Sie a durch μ, α, l und ϵ aus.

Lösung:
Wir haben

$$a = \frac{1}{2}\left(r(\theta = 0) + r(\theta = \pi)\right) \tag{58}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu\alpha}\left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}\right) \tag{59}$$

$$= \frac{l^2}{\mu\alpha(1-\varepsilon^2)} . \tag{60}$$

d) (3 Punkte) Berechnen Sie den Betrag v_1 der Geschwindigkeit des Asteroiden am sonnennächsten Punkt. Drücken Sie v_1 durch μ, α, l und ϵ aus.
Hinweis: Welchen Winkel schließen $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ an diesem Punkt ein?

Lösung:
Am sonnennächsten Punkt haben wir $\theta = 0$. Dort ist der genannte Winkel $\pi/2$. Der erhaltene

Drehimpuls lässt sich hier besonders einfach auswerten:

$$\begin{aligned} l &= \mu v_1 r(\theta = 0) &(61)\\ &= \mu v_1 \frac{l^2}{\mu\alpha(1+\varepsilon)} &(62)\\ \Rightarrow v_1 &= \frac{\alpha}{l}(1+\varepsilon)\,. &(63)\end{aligned}$$

Formelsammlung

A:

ϕ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\phi$	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

B: $$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\sin\theta\,\cos\phi\\ \sin\theta\,\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta\,\cos\phi\\ \cos\theta\,\sin\phi\\ -\sin\theta\end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix}$$

C: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi, \qquad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r, \qquad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$

D: $\vec{l} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

E: $\mathrm{tr}\,R(\vec{\phi}) = 1 + 2\cos\phi$

F: Geometrische Reihe: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$