Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung 00 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön **0 Punkte**
Sebastian Zanker, Daniel Mendler **Besprechung 23.10.2015**

1. Differentialrechnung

Die abgeleiteten Funktionen sind

(i) $-\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$ (ii) $\dfrac{3x-8}{4(x-2)^{3/2}}$

(iii) $-4a^2t^2\cos(at^2)-2a\sin(at^2)$ (iv) $x^x(1+\log x)$

2. Integralrechnung

Hier zuerst eine kleine Anmerkung. Ein unbestimmtes Integral (bzw. Stammfunktion) ist bis auf eine additive Konstante definiert. Diese ist für gewöhnlich durch physikalische Randbedingungen festgelegt. Deshalb findet man häufig vereinfacht folgende Schreibweise

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x$$

und lässt die Konstante einfach weg, behält aber im Hinterkopf, dass die "Integrationskonstante" vorhanden ist und durch Randbedingungen bestimmt wird.

Wir werden die Integrationskonstante im Folgenden mit C bezeichnen.

(a) Hier sollten keine Probleme auftreten:

(i) $F(t)=\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)+C$ (ii) $G(x)=-be^{-x/b}+C$

(b) (i) Hier wendet man die Substitutionsregel an. Für eine auf $[a,b]$ stetig differenzierbare Funktion $\varphi(t)$ gilt, folgend aus der Kettenregel:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u \tag{1}$$

D.h. wir substituieren in der Ausgangsgleichung $\varphi(x)=u$. Als Eselsbrücke für das geänderte Maß kann man verwenden:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x) \Rightarrow \mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Die Herleitung folgt mit dem Hauptsatz der Integralrechnung und der Kettenregel. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}F(\varphi(x))}{\mathrm{d}x}=f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

und damit

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(b))-F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

Häufig haben wir es aber mit Integralen der Form

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

zu tun, bei welchen nicht direkt eine Funktion $\varphi(x)$ ersichtlich ist, die den Integranden in die Form $g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ überführt. Hier hilft dann nur Erfahrung (oder experimentieren) um eine sinnvolle Substitution $u = \varphi(x)$ und $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\mathrm{d}x \to \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/\varphi'(x)$ oder auch $x = \varphi(u)$, $\mathrm{d}x = \varphi'(u)\mathrm{d}u$ zu finden.
Im konkreten Fall kommt das Problem daher, dass wir den Nenner nicht problemlos integrieren können. Wir ersetzen ihn deshalb mit

$$u = x^2 - b \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,$$

d.h. $\varphi(x) = x^2 - b$, $\varphi'(x) = 2x$ und $f(x) = 1/x^n$ in Gleichung (1).Damit finden wir das Integral

$$\text{(i)} = \int \frac{2x}{(x^2-b)^n}\mathrm{d}x = \int \frac{2x}{u^n}\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{u^{1-n}}{1-n} + C = \frac{(x^2-b)^{1-n}}{1-n} + C$$

(ii) Die partielle Integration kann man sich als "Umkehr der Produktregel" herleiten. Seien f und g auf dem Integrationsintervall stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))'\,\mathrm{d}x = \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Dies liefert die Formeln der PI:

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Im konkreten Fall:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)}\underbrace{e^x}_{g(x)}\,\mathrm{d}x = x\,e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

(c) Hier benötigen wir eine Kombination aus beidem. Zuerst substituieren wir $\omega^2 t^2 = x$ um das Quadrat im Argument der trigonometrischen Funktionen zu eliminieren. Aufpassen müssen wir hier auch auf die Integralgrenzen!

$$u = \omega^2 t^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\omega^2 t\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2\omega^2 t}\mathrm{d}u$$

$$0 \to 0 \quad T \to u(T) = \omega^2 T^2$$

$$I = \frac{1}{2\omega^2}\int_0^{\omega^2 T^2} \mathrm{d}u\,\sin u \cos u$$

Nun wenden wir einen Standardtrick zur Integration von Produkten aus trigonometrischen Funktionen an und integrieren partiell (auch wenn hier offensichtlich $2\sin u\cos u = (\sin^2 u)' = -(\cos^2 u)'$ ist, wollen wir partiell integrieren!). Wir definieren $f'(u) = \cos u$ und $g(u) = \sin u$. Damit finden wir

$$\int_0^{\omega^2 T^2} \mathrm{d}u\,\underbrace{\sin u}_{g(u)}\underbrace{\cos u}_{f'(u)} = \int_0^{\omega^2 T^2} \mathrm{d}u\,(\sin u)'\sin u = [\sin^2(u)]_0^{\omega^2 T^2} - \int_0^{\omega^2 T^2} \mathrm{d}u \sin u \cos u$$

Wir können auf der rechten Seite wieder das Ausgangsintegral erkennen. Dieses addieren wir nun zur rechten und linken Seite der Gleichung und finden

$$\int_0^{\omega^2 T^2} \mathrm{d}u\,\sin u\cos u = \frac{1}{2}[\sin^2(u)]_0^{\omega^2 T^2} = \frac{1}{2}\sin^2(\omega^2 T^2)$$

und damit für das zu berechnende Integral

$$I = \frac{1}{2\omega^2}\int_0^{\omega^2 T^2} \mathrm{d}u\,\sin u\cos u = \frac{\sin^2(\omega^2 T^2)}{4\omega^2}$$

3. Vektorrechnung

Die folgenden Vektoren sind gegeben

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Beträge/Normen:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{26}, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{30}, \quad |\boldsymbol{c}| = 5\sqrt{2},$$

Die normierten Vektoren sind dann gegeben durch $\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{a}/a$.

(b) Die lineare Unabhängigkeit können Sie durch Lösen eines linearen Gleichungssystems prüfen. In diesem Fall von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist es allerdings geschickter, die Determinante zu berechnen. Die Determinante lässt sich für kleine Matrizen schnell ausrechnen, insbesondere für 2×2 und 3×3-Matrizen (Siehe Sarrussche Regel).

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -180 \neq 0$$

Da die Determinante nicht verschwindet sind die Vektoren linear unabhängig. Die Matrix ist invertierbar.

(c) Wir berechnen das Skalarprodukt

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -8, \quad \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = -\frac{4}{\sqrt{195}}$$

Mit

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\alpha \implies \alpha = \arccos \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$$

erhalten wir $\alpha \approx 0.59\pi$. Die Projektion des Vektors $\boldsymbol{a}$ auf $\boldsymbol{b}$ wird berechnet durch

$$\boldsymbol{a}_\parallel = \left(\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right) \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{-8}{30} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Den orthogonalen Anteil erhalten wir mit

$$\boldsymbol{a}_\perp = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_\parallel = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -25 \\ 68 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\boldsymbol{a}_\perp \cdot \boldsymbol{b} = 0$ und $\boldsymbol{a}_\parallel \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

(d) Es soll gezeigt werden, dass $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \epsilon_{1jk} a_j b_k \\ \epsilon_{2jk} a_j b_k \\ \epsilon_{3jk} a_j b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 \\ \epsilon_{231} a_3 b_1 + \epsilon_{213} a_1 b_3 \\ \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Für zwei parellele Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w} = w\boldsymbol{v}$ gilt

$$\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v} = w\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = w \begin{pmatrix} v_y v_z - v_z v_y \\ v_z v_x - v_x v_z \\ v_x v_y - v_y v_x \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

Die Fläche des Parallelogramms ist gegeben durch

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -26 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{716} = 2\sqrt{179}$$

Das Volumen des Parallelepipeds ist durch den Betrag des Spatprodukts gegeben

$$|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = 180$$

(e) Drei Punkte A, B und C definieren eine Ebene, wobei wir hier die gegebenen Stützvektoren $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{0A}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{0B}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{0C}$ verwenden. Zuerst berechnen wir den Normalenvektor über das Kreuzprodukt zweier Vektoren, die in der Ebene liegen

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 54 \\ 18 \end{pmatrix} .$$

Der normierte Normalenvektoren ist dann

$$\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Nun gilt für alle Punkte X der Ebene (definiert durch den Vektor $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{0X}$)

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 .$$

Damit erhalten wir die Hesse'sche Normalform $\boldsymbol{x} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = d$ mit

$$d = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{10}{\sqrt{11}} > 0 .$$

Der Normelvektor kann in zwei Richtungen zeigen, wobei wir so gewählt haben, dass $d > 0$.