Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung 01 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön **20 Punkte**
Sebastian Zanker, Daniel Mendler **Besprechung 30.10.2015**

1. Levi-Civita-Tensor (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Wir schreiben bei dieser Aufgabe die Summenzeichen explizit aus, allerdings können diese nach der Einsteinschen Summenkonvention auch weggelassen werden.

(a) Wir zeigen

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

indem wir die möglichen Fälle betrachten. Für $j = k$ oder $l = m$ gilt

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijj}\epsilon_{ill} = \delta_{jl}\delta_{jl} - \delta_{jl}\delta_{jl} = 0$$

Für $j \neq k$ und $l \neq m$ sind nur die Summanden auf der linken Seite nicht 0, für die gilt $i \neq j, k, l, m$. Damit folgen zwei Möglichkeiten:

- $j = l$ und $k = m$: $\sum_{i\neq l,m} \epsilon_{ilm}\epsilon_{ilm} = \delta_{ll}\delta_{mm} - \delta_{lm}\delta_{kl} = 1$,
- $j = m$ und $k = l$: $\sum_{i\neq l,m} \epsilon_{iml}\epsilon_{ilm} = \delta_{ml}\delta_{lm} - \delta_{mm}\delta_{ll} = -1$.

Daraus folgt direkt

$$\sum_{ij} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = \sum_j \delta_{jj}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{kj} = 3\delta_{kl} - \delta_{kl} = 2\delta_{kl}\,.$$

(b)

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \sum_i = a_i(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_i = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

(c) Die Identität folgt durch zyklisches Vertauschen der Indizes des Levi-Civita-Tensors $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \\
\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{jki} b_j c_k a_i = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \\
\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{kij} c_k a_i b_j = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})]_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_k = \sum_{jklm} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} a_j b_l c_m \\
&= \sum_{jklm} \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} a_j b_l c_m = \sum_{jlm} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m \\
&= \sum_j a_j b_i c_j - a_j b_j c_i = b_i(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - c_i(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

(e)

$$\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^\intercal = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

(f) Die Determinante ist definiert als

$$\det A = \sum_{i_1\ldots i_n} \epsilon_{i_1\ldots i_n} A_{1,i_1} A_{2,i_2}\ldots A_{n,i_n}\,.$$

Das Vertauschen (Permutieren) von zwei Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante, was sich aus der Eigenschaft des Permutationssymbols ergibt. Das Gleiche passiert beim Vertauschen zweier Zeilen, z.B.

$$\begin{aligned}\sum_{i_1\ldots i_n} \epsilon_{i_1,i_2\ldots i_n} A_{2,i_1} A_{1,i_2}\ldots A_{n,i_n} &= -\sum_{i_1\ldots i_n} \epsilon_{i_2,i_1\ldots i_n} A_{1,i_2} A_{2,i_1}\ldots A_{n,i_n} \\ &= -\sum_{i_1\ldots i_n} \epsilon_{i_1,i_2\ldots i_n} A_{1,i_1} A_{2,i_2}\ldots A_{n,i_n} = -\det A\end{aligned}$$

Damit folgt $\epsilon_{j_1,\ldots,j_n}\det A = \sum_{i_1\ldots i_n} \epsilon_{i_1\ldots i_n} A_{j_1,i_1} A_{j_2,i_2}\ldots A_{j_n,i_n}$. Für das Produkt zweier Matrizen gilt damit

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{i_1\ldots i_n} \epsilon_{i_1\ldots i_n} \overbrace{(\sum_{j_1} A_{1,j_1} B_{j_1,i_1})}^{(AB)_{1,i_1}} (\sum_{j_2} A_{2,j_2} B_{j_2,i_2})\ldots(\sum_{j_n} A_{n,j_n} B_{j_n,i_n}) \\ &= \sum_{j_1\ldots j_n} (A_{1,j_1} A_{2,j_2}\ldots A_{n,j_n})\left(\sum_{i_1\ldots i_n} \epsilon_{i_1\ldots i_n} B_{j_1,i_1} B_{j_2,i_2}\ldots B_{j_n,i_n}\right) \\ &= \sum_{j_1\ldots j_n} (A_{1,j_1} A_{2,j_2}\ldots A_{n,j_n})\,(\epsilon_{j_1,\ldots,j_n}\det B) = \det A \det B\,.\end{aligned}$$

2. Die Gammafunktion (1 + 2 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Die Gammafunktion ist für reelle Zahlen definiert als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Uns interessiert aber nur der Fall natürlicher Zahlen. Hier erfüllt die Gammafunktion

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!\,,\quad \forall n\in\mathbb{N}_0 \tag{2}$$

Dies wollen wir nun schrittweise beweisen. Da es sehr aufwendig ist das Integral in Gleichung (2) mittels partieller Integration zu berechnen, wollen wir einen Trick anwenden. Dazu definieren wir die Folge

$$f_n(\lambda) = \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{3}$$

(a) Die Beziehung zwischen Gammafunktion und f_n ist

$$f_n(1) = \Gamma(n+1)\,. \tag{4}$$

Nun bilden wir $f'(\lambda)$:

$$\frac{\mathrm{d}f(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_0^\infty x^n\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} e^{-\lambda x}\right)\mathrm{d}x = -\int_0^\infty x^{n+1}\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -f_{n+1}(\lambda) \tag{5}$$

D.h. wir haben die Beziehung

$$f_{n+1}(\lambda) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} f_n(\lambda) \tag{6}$$

(b) Nun berechnen wir die ersten Folgeglieder um auf $f_n(\lambda)$ schließen zu können. Wie in der Aufgabe vorgegeben berechnen wir f_0 explizit:

$$f_0(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda} \tag{7}$$

Mit (6) berechnen wir weitere Folgeglieder:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= -f_0'(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \\ f_2(\lambda) &= -f_1'(\lambda) = 1\cdot 2\,\frac{1}{\lambda^3} \\ f_3(\lambda) &= -f_2'(\lambda) = 1\cdot 2\cdot 3\,\frac{1}{\lambda^4} \\ f_4(\lambda) &= -f_3'(\lambda) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\frac{1}{\lambda^5} \end{aligned}$$

Damit stellen wir die Vermutung auf

$$f_n(\lambda) = n!\,\frac{1}{\lambda^{n+1}}\,. \tag{8}$$

(c) Diese Vermutung beweisen wir mit vollständiger Induktion.

(i) Induktionsanfang:

$$f_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda} = 0!\frac{1}{\lambda^{0+1}} \tag{9}$$

(ii) Induktionsvoraussetzung: Es gelte (8) für ein $n \geq 0$

(iii) Induktionsbehauptung

$$f_{n+1} = (n+1)!\frac{1}{\lambda^{n+2}} \tag{10}$$

(iv) Induktionsschluss: $n \to n+1$:

$$f_{n+1}(\lambda) \overset{(6)}{=} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f_n(\lambda) \overset{\text{I.V.}}{=} -n!\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{1}{\lambda^{n+1}} = n!\cdot(n+1)\frac{1}{\lambda^{n+2}} = (n+1)!\frac{1}{\lambda^{(n+1)+1}} \quad \square \tag{11}$$

(d) Wir beweisen nun (2). Wir wissen:

$$\Gamma(n+1) = f_n(1) \overset{(6)}{=} n!\frac{1}{1^{n+1}} = n! \quad \square \tag{12}$$

3. Flugnavigation

(1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 8 Punkte)

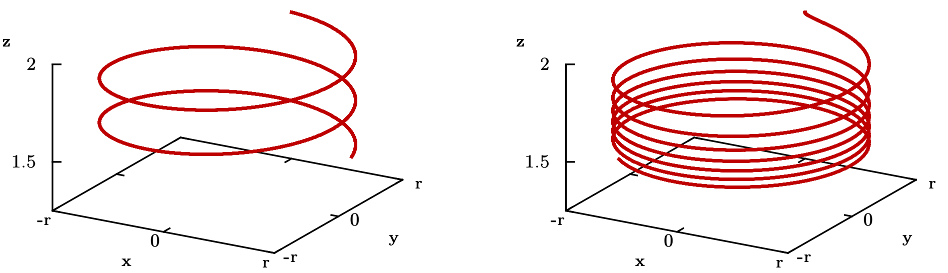

Abbildung 1: Skizze der Bahnkurve aus (a), links und (d), rechts

(a) Siehe Abb. 1.

(b)

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} r\omega\cos(\omega t) \\ -r\omega\sin(\omega t) \\ -\alpha \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$v(t) = |\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{r^2\omega^2\cos^2(\omega t) + r^2\omega^2\sin^2(\omega t) + \alpha^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + \alpha^2} = \text{const.} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2\sin(\omega t) \\ -r\omega^2\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$a(t) = |\boldsymbol{a}(t)| = r\omega^2 \tag{16}$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant, lediglich die Richtung ändert sich, d.h. das Flugzeug sinkt mit seiner "natürlichen Sinkrate" ohne Geschwindigekitszuwachs.

Die Beschleunigung verschwindet nicht, da sich die Richtung der Geschwindigkeit ständig ändert. Damit das Flugzeug auf seiner Kreisbahn bleibt, muss eine Kraft/ Beschleunigung aufgebracht werden.

(c) Wir betrachten zuerst die geometrische Lösung. Dazu stellen wir uns die Bahnkurve als auf einen Zylinder gewickelten Draht vor. Die Höhe dieses Zylinders ist $h = z_0 - z(t) = \alpha t$, der Umfang $2\pi r$. Um diesen Zylinder macht der Draht insgesamt $\eta = \omega t/(2\pi)$ Windungen, was einer Länge von $\omega r t$ entspricht. Wickeln wir nun den Draht vom Zylinder finden wir ein rechtwinkliges Dreieck, siehe Abb. 2. Damit ist

$$s(t) = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2 r^2}\, t \tag{17}$$

Mit der Formel für die Bogenlänge finden wir das selbe Ergebnis:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\alpha^2 + \omega^2 r^2} \mathrm{d}t' = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2 r^2}\, t \tag{18}$$

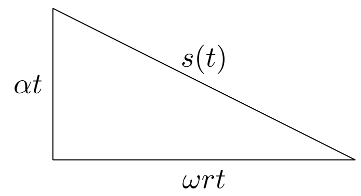

Abbildung 2: Skizze zu (3c)

(d)

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} rAt\cos(At^2/2) \\ -rAt\sin(At^2/2) \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$v(t) = |\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{r^2A^2t^2 + \alpha_2^2} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = rA \begin{pmatrix} \cos(At^2/2) - At^2\sin(At^2/2) \\ -\sin(At^2/2) - At^2\cos(At^2/2) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$a(t) = |\boldsymbol{a}(t)| = rA\sqrt{1 + A^2t^4} \tag{22}$$

Die Geschwindigkeit des Flugzeugs nimmt mit der Zeit zu (für große Zeiten linear). Wir befinden uns also nicht mehr in einem Gleitflug sondern sinken so schnell, dass die Geschwindigkeit zunimmt.

(e) Wir berechnen die zurückgelegt Strecke:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\alpha_2^2 + r^2 A^2 t'^2}\,\mathrm{d}t' = \alpha_2 \int_0^t \sqrt{1 + \frac{r^2 A^2}{\alpha_2^2} t'^2}\,\mathrm{d}t' \tag{23}$$

Zuerst bringen wir das Integral in die auf dem Aufgabenblatt angegebene Form. Dazu substituieren wir

$$u = \frac{rA}{\alpha_2} t' \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{rA}{\alpha_2}\,\mathrm{d}t' \tag{24}$$

$$0 \to u(0) = 0\,, \quad t \to u(t) = \frac{rA}{\alpha_2} t \tag{25}$$

Damit haben wir

$$s(t) = \frac{\alpha_2^2}{rA} \int_0^{\frac{rA}{\alpha_2}t} \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u \tag{26}$$

Wir betrachten das Integral

$$\int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u \tag{27}$$

Mit dem Wissen $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$ scheint die Substitution

$$u = \sinh x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cosh(x)\mathrm{d}x \tag{28}$$

sinnvoll. Damit finden wir:

$$\int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \sqrt{1+\sinh^2 x}\,\cosh x\,\mathrm{d}x = \int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x \tag{29}$$

Das letzte Integral lässt sich mittels partieller Integration lösen:

$$\int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x\right) \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x \cosh x - \int \sinh^2 x\,\mathrm{d}x \tag{30}$$

Nun schreiben wir $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$

$$\int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x = \sinh x \cosh x - \int (\cosh^2 x - 1)\mathrm{d}x \tag{31}$$

addieren von $\int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x$ auf beiden Seiten gibt schließlich:

$$\int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x + x) = \frac{1}{2}(\sinh x \sqrt{1+\sinh^2 x} + x) \tag{32}$$

Nun resubstituieren wir $x = \operatorname{arsinh}(u)$ und finden

$$\int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{arsinh}(u)\right) \tag{33}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} s(t) = \frac{\alpha_2^2}{rA} \int_0^{\frac{rA}{\alpha_2}t} \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{\alpha_2^2}{rA}\left[\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{arsinh}(u)\right)\right]_0^{\frac{rA}{\alpha_2}t} \\ &= \frac{\alpha_2^2}{2rA}\left(\frac{rAt}{\alpha_2}\sqrt{1+\left(\frac{rAt}{\alpha_2}\right)^2} + \operatorname{arsinh}\left(\frac{rAt}{\alpha_2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{\alpha_2^2 + r^2A^2t^2} + \frac{\alpha_2^2}{rA}\operatorname{arsinh}\left(\frac{rAt}{\alpha_2}\right)\right) \end{aligned} \tag{34}$$

(f) Gegegeben sind unsere Geschwindigkeit in der Luft $v = 150\,\mathrm{km/h}$, der Zielkurs über Grund von $\alpha = 2\pi\frac{220°}{360°}$ gemessen von Nord im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ, wie beim Kompass) sowie Windrichtung und Windgeschwindigkeit $\boldsymbol{w} = (50, 0)^\intercal\,\mathrm{km/h}$. Unseren Geschwindigkeitsvektor über Grund $\boldsymbol{g}$ und unseren Geschwindigkeitsvektor relativ zur Luft $\boldsymbol{v}$ stellen wir jeweils dar als

$$\boldsymbol{g} = g\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = v\begin{pmatrix}\sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix}. \tag{35}$$

Gesucht ist der Zielkurs in der Luft β und die Geschwindigkeit über Grund $g > 0$. Es gilt nun das folgende Gleichungssystem

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{g} \tag{36}$$

$$150\begin{pmatrix}\sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}50\\ 0\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{37}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $g = 150\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$150\sin\beta + 50 = 150\cos\beta\tan\alpha \tag{38}$$

$$\sin\beta - \cos\beta\tan\alpha + \frac{1}{3} = 0 \tag{39}$$

Diese Gleichung kann entweder numerisch gelöst werden, indem man die Nullstellen der linken Seite findet oder algebraisch wie folgt. Wir setzen $x = \sin\beta$ und $\cos\beta = \sqrt{1-x^2}$. Damit ergibt sich die quadratische Gleichung

$$x + \frac{1}{3} = \sqrt{1-x^2}\tan\alpha \tag{40}$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = (1-x^2)\tan^2\alpha \tag{41}$$

$$x^2(1+\tan^2\alpha) + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \tan^2\alpha = 0 \tag{42}$$

Die Gleichung hat die Lösungen

$$x_1 \approx 0.43, \quad x_2 \approx -0.82 \tag{43}$$

Damit ergibt sich

$$\beta_1 = \arcsin x_1 =\approx 0.44 \approx 25°, \quad \beta_2 = \pi - \arcsin x_2 \approx 4.1 \approx 235° \tag{44}$$

Einsetzen liefert die Geschwindigkeiten über Grund

$$g_1 = 150\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha} \approx -177\,\mathrm{km/h}, \quad g_2 = 150\frac{\cos\beta_2}{\cos\alpha} \approx 113\,\mathrm{km/h} \tag{45}$$

Die gesuchte Geschwindigkeit ist $g = g_2 > 0$. Damit erhalten wir eine Flugzeit von $\frac{35\,\mathrm{km}}{113\,\mathrm{km/h}} \approx 19\,\mathrm{min}$.