Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik   www.tfp.kit.edu

Lösung 02 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

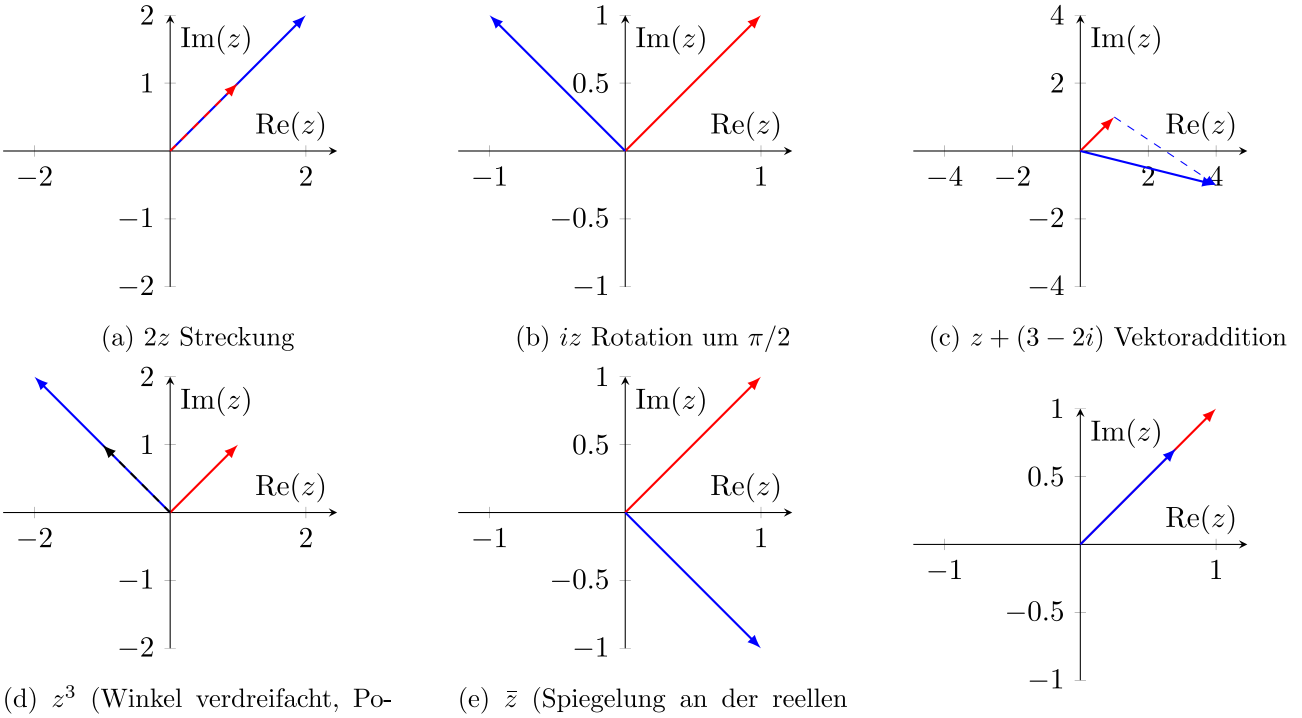
20 Punkte
Besprechung 06.11.2015

1. Komplexe Zahlen

$(3 + 1,5 + 2 + 1,5 + 1 = 9$ Punkte$)$

(a)

$$2z = 2(1+i) = 2+2i \tag{1}$$
$$iz = i(1+i) = -1+i \tag{2}$$
$$z + (3-2i) = (1+i) + (3-2i) = 4-i \tag{3}$$
$$z^3 = (1+i)^3 = 1+3i-3-i = -2+2i \tag{4}$$
$$\bar{z} = \overline{1+i} = 1-i \tag{5}$$
$$z/|z| = (1+i)/\sqrt{2} \tag{6}$$



(a) $2z$ Streckung

(b) iz Rotation um $\pi/2$

(c) $z + (3-2i)$ Vektoraddition

(d) z^3 (Winkel verdreifacht, Potenzieren der Norm)

(e) $\bar{z}$ (Spiegelung an der reellen Achse)

(f) $z/|z|$ (Normierung)

Abbildung 1: Rechnen in der komplexen Zahlenebene. z ist in rot. Das Ergebnis in blau.

(b) Kartesisch:

$$(1+i)\cdot(2+2i) = 2+2i+2i-2 = 4i \tag{7}$$
$$\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \tag{8}$$
$$i^3(1-i)^3 = -i(1-3i-3+i) = -i(-2-2i) = -2+2i \tag{9}$$

Polar:

$$(1+i)\cdot(2+2i) = 4i = 4e^{i\pi/2} \tag{10}$$

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i = \sqrt{\frac{3+1}{2}}e^{i5\pi/12} = \sqrt{2}e^{i5\pi/12} \tag{11}$$

$$i^3(1-i)^3 = -2+2i = \sqrt{8}e^{i3\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4} \tag{12}$$

Den Winkel berechnet man mit

$$\arg z = \arg(x+iy) = \operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{für } x>0, \\ \arctan(\frac{y}{x})+\pi & \text{für } x<0 \text{ und } y\geq 0, \\ \arctan(\frac{y}{x})-\pi & \text{für } x<0 \text{ und } y<0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{für } x=0 \text{ und } y>0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x=0 \text{ und } y<0, \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x=0 \text{ und } y=0. \end{cases}$$

Für die zweite Zahl ergibt sich $x>0$, d.h.

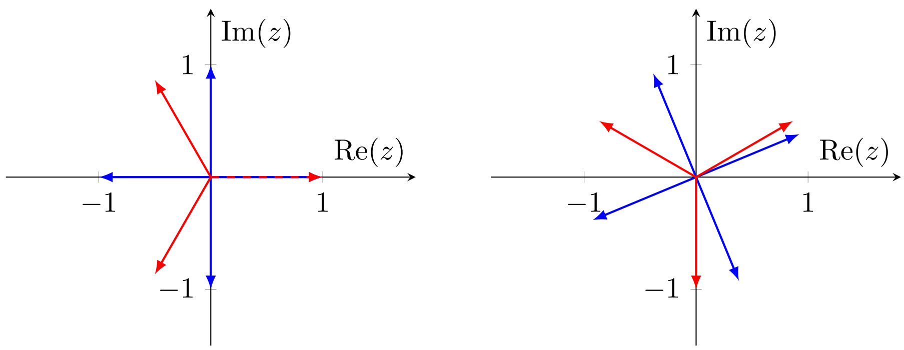
$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = 2+\sqrt{3} \implies \arctan\frac{y}{x} = 5\frac{\pi}{12}$$

(c) Wir berechnen die komplexen Einheitswurzeln $z^n = 1$:

$$z = 1^{1/n} = \left(e^0\right)^{1/n} = \left(e^{0+2\pi ik}\right)^{1/n} = \exp\frac{2\pi ik}{n} \text{ für } k=0,1,\ldots,n-1 \tag{13}$$

Für $z^n = i$ erhalten wir

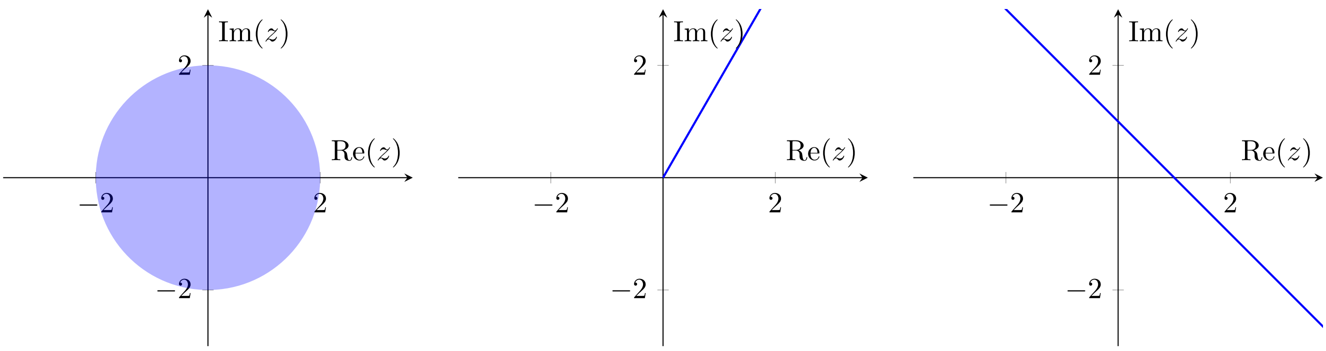
$$z = i^{1/n} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{1/n} = \left(e^{i\pi/2+2\pi ik}\right)^{1/n} = \exp\frac{i\pi(1+4k)}{2n} \text{ für } k=0,1,\ldots,n-1 \tag{14}$$



(a) $z^n = 1$ (b) $z^n = i$

Abbildung 2: Komplexe Wurzeln

(d) Mengen in der komplexen Zahlenebene:



(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \pi/3\}$ (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1\}$

(e) Exponentialreihe in gerade und ungerade Potenzen zerlegen:

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

2. Taylor–Entwicklung (2 + 2 + 1 + 3 + 3 = 11 Punkte)

(a) Wir untersuchen $f(x) = \ln(1 + x)$.

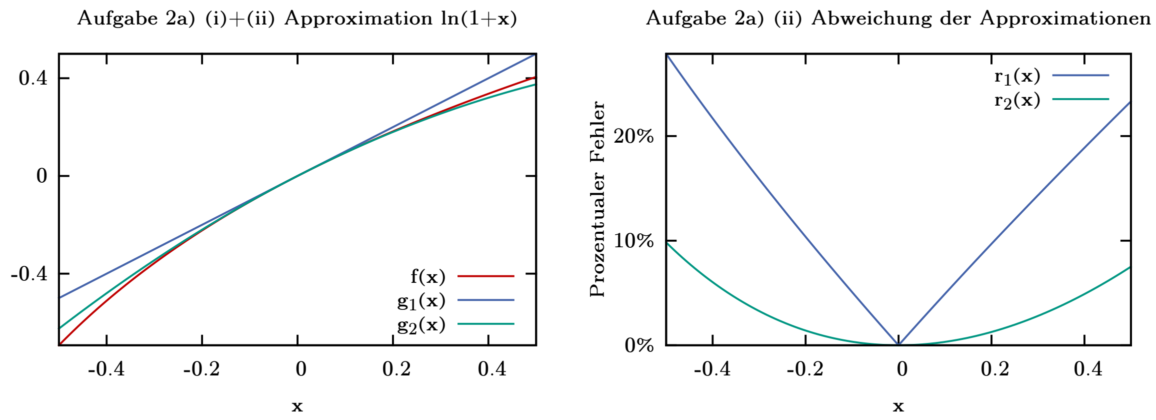


Abbildung 3: Plot von $\ln(1 + x)$ mit Näherungen und Plot des relativen Fehlers.

(i) Siehe Abbildung 3.

(ii) Wir berechnen die Taylor-Entwicklung 1. und 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) & &\Rightarrow \quad f(0) = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} & &\Rightarrow \quad f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & &\Rightarrow \quad f''(0) = -1
\end{aligned}$$

Und damit

$$g_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x = x \tag{15}$$

$$g_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 = x - \frac{1}{2} x^2 \tag{16}$$

(b) Wir berechnen jeweils die ersten 2 nicht verschwindenden Terme der Taylor-Entwicklung.

(i)

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{\sin x}{1+x} & &\Rightarrow \quad f_1(0) = 0 \\
f_1^{(1)}(x) &= \frac{\cos x}{1+x} - \frac{\sin x}{(1+x)^2} & &\Rightarrow \quad f_1^{(1)}(0) = 1 \\
f_1^{(2)}(x) &= -\frac{\sin x}{x+1} - \frac{2\cos x}{(1+x)^2} + \frac{2\sin x}{(x+1)^3} & &\Rightarrow \quad f_1^{(2)}(0) = -2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad f_1(x) \approx x - x^2 = x\,(1-x) \tag{17}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
&f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} && \Rightarrow \quad f_2(0) = 1 \\
&f_2^{(1)}(x) = x\,(1-x^2)^{-3/2} && \Rightarrow \quad f_2^{(1)}(0) = 0 \\
&f_2^{(2)}(x) = (1-x^2)^{-3/2} - 3x^2(1-x^2)^{-5/2} && \Rightarrow \quad f_2^{(2)}(0) = 1 \\
&\Rightarrow \quad f_2(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2
\end{aligned} \tag{18}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
&f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y && \Rightarrow \quad f_3(0) = 0 \\
&f_3^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} && \Rightarrow \quad f_3^{(1)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
&f_3^{(2)}(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} && \Rightarrow \quad f_3^{(2)}(0) = 0 \\
&f_3^{(3)}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} && \Rightarrow \quad f_3^{(3)}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
&\Rightarrow \quad f_3(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x(1 - \frac{1}{3!}x^2)
\end{aligned} \tag{19}
$$

(d) Wir wollen eine Näherung für das vollständige elliptische Integral I. Art

$$
K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2(\sin\vartheta)^2}} \mathrm{d}\vartheta. \tag{20}
$$

bestimmen. Da $k < 1$ und $\sin^2\vartheta \leq 1$ entwickeln wir den Integrand in dem kleinen Parameter $x \equiv k\sin\vartheta$. In Aufgabe (d) haben wir bereits $1/\sqrt{1-x^2}$ bis zur 2. Ordnung entwickelt. Daher finden wir mit (18)

$$
\frac{1}{\sqrt{1-k^2(\sin\vartheta)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}k^2(\sin\vartheta)^2. \tag{21}
$$

Damit finden wir für $K(k)$

$$
K(k) \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}k^2(\sin\vartheta)^2\right) \mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{2} + \frac{k^2\pi}{8} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right). \tag{22}
$$

und

$$
K(0.1) \approx 0{,}50125\,\pi\,, \quad K(0{,}8) \approx 0{,}58\,\pi
$$

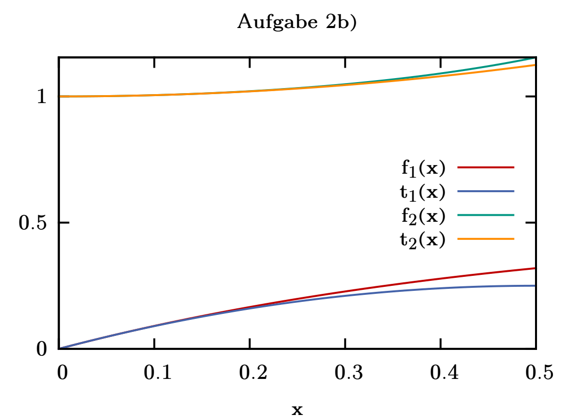


Abbildung 4: Plot von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ und den jeweiligen Taylor-Näherungen $t_1(x)$ und $t_2(x)$.

Wir sehen, dass die Approximation, wie zu erwarten, für größeres k schlechter wird, während bei $k = 0{,}1$ die Approximation einen sehr guten Wert liefert.

(e) Zu zeigen ist, dass für $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ die Taylor–Reihe exakt ist, also

$$T_\infty f(x; x_0) = f(x) \tag{23}$$

Dazu berechnen wir die N-te Ableitung von $f(x)$ am Entwicklungspunkt x_0 und zeigen, dass $N! a_N = f^{(N)}(x_0)$, was genau der Taylor-Reihe entspricht.

$$\frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}x^N} f(x) = \frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}x^N} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = N! a_N + \frac{(N+1)!}{1!} a_{N+1} (x - x_0)^1 + \frac{(N+2)!}{2!} a_{N+2} (x - x_0)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}x^N} f(x_0) = N! a_N \quad \square \tag{24}$$

Hier haben wir im ersten Schritt ausgenutzt, dass die n-te Ableitung für alle Terme mit $n < N$ verschwindet.

(f) Wir berechnen noch einige Terme der Entwicklung:

$$f^{(3)}(x) = 2 \frac{1}{(1+x)^3} \qquad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -6 \frac{1}{(1+x)^4} \qquad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = -6$$

$$f(x) \approx 0 + x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \tag{25}$$