Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung 03 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Punkte
Besprechung 13.11.2015

---

1. Hyperbelfunktionen (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)

(a) Hyperbelfunktionen durch Exponentialfunktionen darstellen:

$$
\begin{aligned}
\cosh x + \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \\
\cosh x - \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{-x} \\
\Longrightarrow \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}
\end{aligned}
$$

Trigonometrische Funktionen durch Exponentialfunktionen darstellen:

$$
\begin{aligned}
\cos x + i \sin x &= e^{ix} \\
\cos x - i \sin x &= e^{-ix} \\
\Longrightarrow \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
\end{aligned}
$$

(b) Zusammenhang zwischen trigonometrischen und Hyperbelfunktionen:

$$
\begin{aligned}
\sin(ix) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = i \frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \sinh x \\
\sinh(ix) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin x \\
\cos(ix) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\
\cosh(ix) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x
\end{aligned}
$$

(c) Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\sin'' x &= \cos' x = -\sin x \\
\cos'' x &= -\sin' x = -\cos x \\
\cosh' x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \\
\sinh' x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\
\cosh'' x &= \cosh x \\
\sinh'' x &= \sin x
\end{aligned}
$$

(d) Additionstheoreme:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{(e^{2ix}+2+e^{-2ix})-(e^{2ix}-2+e^{-2ix})}{4} = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x})-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{4} = 1$$

(e) Winkeladdition:

$$\begin{aligned}\sinh x\cosh y \pm \cosh x \sinh y &= \frac{1}{4}\left[(e^x - e^{-x})(e^y+e^{-y}) \pm (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(e^{x+y} - e^{-x-y} + e^{x-y} - e^{-x+y}) \pm (e^{x+y} - e^{-x-y} - e^{x-y} + e^{-x+y})\right]\end{aligned}$$

Für $+$ bleiben die Terme mit selbem Vorzeichen (e^{x+y} und e^{-x-y}) erhalten und für $-y$ entsprechend die Terme mit unterschiedlichem Vorzeichen (e^{x-y} und e^{-x+y}). Damit gilt

$$\sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y = \sinh(x \pm y)\,.$$

Die rot markierten Vorzeichen der e^{-x}-Terme ändern sich beim zweiten Additionstheorem, da dort $\sinh x \leftrightarrow \cosh x$ vertauscht wurden. Entsprechend lassen sich die trigonometrischen Additionstheoreme zeigen.

2. Schiefer Wurf vom Turm $(2+1+1+2+2=8$ Punkte$)$

(a) Wir berechnen die Bahnkurve. Bitte diskutieren Sie ausführlich, wie man die Bahnkurve durch Integration unter Verwendung der Anfangsbedingungen erhält. Die konstante Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{r}} = (0,0,-g)$, die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (v_0\cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha)$ sowie der Abwurfpunkt $\boldsymbol{r}(0) = (0,0,h)$ sind als Anfangsbedingungen vorgegeben.

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}(t) &= \ddot{\boldsymbol{r}} = (0,0,-g)\\ \dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \int_0^t \ddot{\boldsymbol{r}}(t)\mathrm{d}t + \dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0,0,-gt) + \dot{\boldsymbol{r}}(0) = (v_0\cos\alpha, 0, v_0\sin\alpha - gt)\\ \boldsymbol{r}(t) &= \int_0^t \dot{\boldsymbol{r}}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{r}(0) = (v_0 t\cos\alpha, 0, v_0 t\sin\alpha - gt^2/2 + h)\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen den Zeitpunkt $T_{\max}$ und die Höhe $z_{\max} = z(T_{\max})$ des Scheitelpunkts. Am Scheitelpunkt verschwindet die Geschwindigkeit in z-Richtung.

$$\dot{z}(T_{\max}) = 0 \Leftrightarrow v_0\sin\alpha - gT_{\max} = 0 \implies T_{\max} = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

$$z_{\max} = z(T_{\max}) = v_0 T_{\max}\sin\alpha - \frac{gT_{\max}^2}{2} + h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + h$$

(c) Wir berechnen den Zeitpunkt des Auftreffens, wobei $z(T) = 0$ gilt.

$$\begin{aligned} z(T) &= -g\frac{T^2}{2} + v_0 T\sin\alpha + h = 0\\ \Leftrightarrow \frac{T^2}{2} &- \frac{v_0\sin\alpha}{g}T - \frac{h}{g} = 0\\ \Leftrightarrow \frac{T^2}{2} &- T_{\max}T - \frac{h}{g} = 0\\ \implies T_{1,2} &= T_{\max} \pm \sqrt{T_{\max}^2 + \frac{2h}{g}}\end{aligned}$$

Wegen $T > 0$ ergibt sich $T = T_{\max} + \sqrt{T_{\max}^2 + \frac{2h}{g}}$. Damit ergibt sich durch Einsetzen $x(T)$.

(d) Der zurückgelegte Weg des Balls in Abhängigkeit von t ist gegeben durch $L(t) = l(t) - l(0)$ mit dem Integral

$$\begin{aligned} l(t) &= \int |\boldsymbol{v}(t)| \mathrm{d}t = \int \sqrt{\boldsymbol{v}(t)^2} \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t \sqrt{g^2t^2 - 2gtv_0 \sin\alpha + v_0^2} \\ &= g \int \mathrm{d}t \sqrt{t^2 - 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g} t + \frac{v_0^2}{g^2}} = g \int \mathrm{d}t \sqrt{t^2 - 2T_{\max} t + \frac{v_0^2}{g^2}} \,. \end{aligned}$$

Wir berechnen das folgende Integral mit $a = T_{\max}$ und $b = v_0^2/g^2$

$$\int \mathrm{d}t \sqrt{t^2 - 2at + b} = \int \mathrm{d}t \sqrt{(t-a)^2 + (b - a^2)} \,.$$

Substitution mit $t = \sqrt{b - a^2} \sinh\phi + a$ und $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\phi \sqrt{b-a^2} \cosh\phi$ liefert

$$\int \mathrm{d}\phi \sqrt{b-a^2} \cosh\phi \sqrt{(b-a^2)\sinh^2\phi + (b-a^2)} = (b-a^2) \int \mathrm{d}\phi \cosh^2\phi \,.$$

Dieses Integral wurde bereits auf Blatt 1 gelöst. Wir erhalten

$$(b-a^2) \int \cosh^2\phi \, \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}(b-a^2)\left(\sinh\phi\cosh\phi + \phi\right) = \frac{1}{2}(b-a^2)\left(\sinh\phi\sqrt{1+\sinh^2\phi} + \phi\right) \,.$$

Mit $\phi = \operatorname{arsinh} \frac{t-a}{\sqrt{b-a^2}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(b-a^2)\left(\frac{t-a}{\sqrt{b-a^2}}\sqrt{1 + \frac{(t-a)^2}{b-a^2}} + \operatorname{arsinh}\frac{x-a}{\sqrt{b-a^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((t-a)\sqrt{t^2 - 2at + b} + (b-a^2)\operatorname{arsinh}\frac{t-a}{\sqrt{b-a^2}}\right) \,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned} l(t) &= \frac{g}{2}\left((t - T_{\max})\sqrt{t^2 - 2T_{\max}t + \frac{v_0^2}{g^2}} + \left(\frac{v_0^2}{g^2} - T_{\max}^2\right)\operatorname{arsinh}\frac{t - T_{\max}}{\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - T_{\max}^2}}\right) \\ l(0) &= \frac{g}{2}\left(-\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 \sin\alpha + \left(\frac{v_0}{g}\cos\alpha\right)^2 \operatorname{arsinh}\frac{-\frac{v_0}{g}\sin\alpha}{\frac{v_0}{g}\cos\alpha}\right) \\ &= -\frac{v_0^2}{2g}\left(\sin\alpha + \cos^2\alpha \operatorname{arsinh}(\tan\alpha)\right) \\ l(T_{\max}) &= 0 \end{aligned}$$

und den zurückgelegten Weg $L(T_{\max}) = l(T_{\max}) - l(0) = -l(0)$.

(e) Wir wollen $L(T)$ für die Grenzfälle $\alpha = \pm\pi/2$ betrachten. Zuerst berechnen wir $l(T)$

$$\begin{aligned} T_{\max}\big|_{\alpha=\pm\frac{\pi}{2}} &= \pm\frac{v_0}{g} \\ T\big|_{\alpha=\pm\frac{\pi}{2}} &= \pm\frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \\ l(T)\big|_{\alpha=\pm\frac{\pi}{2}} &= \frac{g}{2}(T - T_{\max})^2\Big|_{\alpha=\pm\frac{\pi}{2}} = \frac{g}{2}\left(\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g} + h \,. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir $\lim_{\alpha\to\pm\pi/2} l(0)$ und berechnen dazu zuerst

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha \,\mathrm{arsinh}(\tan\alpha) = \cos^2\alpha \ln(\tan\alpha + \sqrt{\tan^2\alpha + 1}) \\
&= \cos^2\alpha \ln\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1}\right) = \cos^2\alpha \ln\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{|\cos\alpha|}\right) .
\end{aligned}$$

Nun gilt $\cos\alpha > 0$ und $\sin\alpha + 1 > 0$ für $\alpha \to \pi/2^-$ (linksseitiger Grenzwert) und $\alpha \to -\pi/2^+$ (rechtsseitiger Grenzwert) und damit

$$\cos^2\alpha \ln\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{|\cos\alpha|}\right) = \cos^2\alpha \ln\left(\frac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha}\right) = \frac{1}{\cos^{-2}\alpha}\left(\ln(\sin\alpha + 1) - \ln\cos\alpha\right)$$

Für beide Grenzwerte divergieren $\cos^{-2}\alpha \to \infty$ und $\ln\cos\alpha \to \infty$. Nur für den rechtsseitigen Grenzwert $\alpha \to -\pi/2^+$ divergiert $\ln(\sin\alpha{+}1) \to -\infty$. Wir betrachten einen Bruch der jeweiligen Grenzwerte. Es ist also relevant welche der Funktionen „schneller" divergiert. Wir wenden die Regel von l'Hospital an und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\cos^{-2}\alpha}{\mathrm{d}\alpha} &= 2\cos^{-3}\alpha\sin\alpha \\
\frac{\mathrm{d}\ln\cos\alpha}{\mathrm{d}\alpha} &= -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\
\frac{\mathrm{d}\ln(\sin\alpha + 1)}{\mathrm{d}\alpha} &= \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} \\
\frac{\frac{\mathrm{d}\ln\cos\alpha}{\mathrm{d}\alpha}}{\frac{\mathrm{d}\cos^{-2}\alpha}{\mathrm{d}\alpha}} &= -\frac{\sin\alpha/\cos\alpha}{2\cos^{-3}\alpha\sin\alpha} = -\frac{1}{2}\cos^2\alpha \to 0 \\
\frac{\frac{\mathrm{d}\ln(\sin\alpha+1)}{\mathrm{d}\alpha}}{\frac{\mathrm{d}\cos^{-2}\alpha}{\mathrm{d}\alpha}} &= \frac{\cos\alpha/(1 + \sin\alpha)}{2\cos^{-3}\alpha\sin\alpha} = \frac{\cos^4\alpha}{2(\sin\alpha + \sin^2\alpha)}
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall gehen Zähler und Nenner gegen 0. Daher müssen wir nochmals l'Hospital anwenden

$$\frac{\frac{\mathrm{d}\cos^4\alpha}{\mathrm{d}\alpha}}{2\frac{\mathrm{d}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\mathrm{d}\alpha}} = \frac{4\cos^3\alpha\sin\alpha}{2\cos\alpha(1 + 2\sin\alpha)} = \frac{2\cos^2\alpha\sin\alpha}{1 + 2\sin\alpha} \to 0 .$$

Damit ist gezeigt, dass der Grenzwert verschwindet und für $\lim_{\alpha\to\pm\pi/2} l(0)$ ergibt sich dann

$$\lim_{\alpha\to\pm\pi/2} l(0) = \mp\frac{v_0^2}{2g} .$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to\pi/2} L(T) &= \frac{v_0^2}{g} + h = 2z_{\max} - h , \\
\lim_{\alpha\to-\pi/2} L(T) &= h .
\end{aligned}$$

3. Dragster

(2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7 Punkte)

(a) Der Impuls des Dragster ist $p(t) = m(t)\, v(t)$. Damit finden wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}\, v(t) + m(t)\, \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\, m_{T,0}\, v(t) + m(t) \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = F_0 \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{F_0 + \frac{m_{T,0}}{\tau}\, v(t)}{m_D + m_{T,0} - \frac{m_{T,0}}{\tau}\, t} \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\frac{\tau F_0}{m_{T,0}} + v(t)}{\frac{\tau(m_D + m_{T,0})}{m_{T,0}} - t} \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mu + v(t)}{\tau' - t}
\end{aligned}$$

mit

$$\mu = \frac{\tau F_0}{m_{0,T}} \qquad \tau' = \frac{\tau(m_D + m_{T,0})}{m_{T,0}}$$

(b) Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mu + v} = \frac{\mathrm{d}t}{\tau' - t}$$

Integration liefert

$$\begin{aligned}
&\int_{v(0)=0}^{v} \frac{\mathrm{d}v'}{\mu + v'} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{\tau' - t'} \\
\Rightarrow \quad & \ln(v + \mu) - \ln(\mu) = -\ln\big(\tau' - t\big) + \ln(\tau') \\
\Rightarrow \quad & \ln\left(\frac{v + \mu}{\mu}\right) = \ln\left(\frac{\tau'}{\tau' - t}\right) \\
\Rightarrow \quad & v(t) = \mu\left(\frac{1}{1 - t/\tau'} - 1\right) = \mu\, \frac{t}{\tau' - t}
\end{aligned}$$

Alternativ mit Integrationskonstante:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}v}{\mu + v} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\tau' - t} \\
\Rightarrow \quad & \ln(v + \mu) = -\ln\big(\tau' - t\big) + C\,, \quad C = \text{const.} \\
v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad & \ln(\mu) = -\ln\big(\tau'\big) + C \\
\Rightarrow \quad & C = \ln\big(\tau' \mu\big)
\end{aligned}$$

Beide Vorgehensweisen liefern natürlich das gleiche Ergebnis.

(c) Der Treibstoff ist zum Zeitpunkt $t_{\text{end}} = \tau$ aufgebraucht. Das heißt

$$t_{\text{end}}/\tau' = \tau/\tau' = \frac{m_{T,0}}{m_D + m_{T,0}}$$

und damit

$$v_{\text{end}} = \mu\left(\frac{1}{1 - \frac{m_{T,0}}{m_{T,0} + m_D}} - 1\right) = \frac{m_{T,0}}{m_D}\, \mu = \frac{\tau F_0}{m_D}$$

Wir sehen, dass die Endgeschwindigkeit umso größer ist, je leichter der Dragster selbst ist (m_D klein), je größer die Schubkraft ist (F_0 groß) oder je langsamer der Treibstoff verbrannt wird (τ groß).

(d) Wir berechnen die zurückgelegte Strecke mittels Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{d}x' &= \int_0^t \mathrm{d}t'\, v(t') = \mu \int_0^t \mathrm{d}t' \left(\frac{1}{1-t'/\tau'} - 1\right)\\ \Rightarrow \quad x(t) &= -\mu\tau' \left[\ln\left(1 - t/\tau'\right) - \ln(1)\right] - \mu\, t\\ \Rightarrow \quad x(t) &= -\mu\left[\tau' \ln\left(1 - \frac{t}{\tau'}\right) + t\right]\end{aligned}$$

Für $t > \tau$ wirkt keine Kraft mehr. Der Dragster bewegt sich dann gleichförmig weiter:

$$x(t > \tau) = x(\tau) + v(\tau)(t - \tau)$$

(e) Wir entwickeln $x(t)$ für kleine Zeiten $t \ll \tau'$. Dazu nutzen wir die bereits aus dem letzten Blatt bekannt Entwicklung

$$\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} \pm \ldots$$

Damit finden wir bis zur führenden Ordnung in t/τ'

$$x(t) \approx -\mu\left[-\tau'\left(\frac{t}{\tau'} + \frac{t^2}{2\tau'^2}\right) + t\right] = \frac{\mu}{\tau'}\frac{t^2}{2}$$

Dies entspricht der zurückgelegten Strecke bei konstanter Beschleunigung

$$a_0 = \frac{\mu}{\tau'} = \frac{F_0}{m_D + m_{T,0}} = \frac{F_0}{m(0)}$$

Kein Teil der Aufgabe aber auch ganz interessant und ein guter Konsistenzcheck ist die Entwicklung für $m_{T,0} \ll m_D$ (wir entwickeln hier $v(t)$ im kleinen Parameter $m_{T,0}/m_D$):

$$v = \mu\,\frac{t}{\tau' - t} = \frac{\tau F_0}{m_{T,0}}\,\frac{m_{T,0}t}{\tau m_D + \tau m_T(1 - t/\tau)} \quad = \frac{F_0 t}{m_D}\,\frac{1}{1 + \frac{m_{T,0}}{m_D}(1 - t/\tau)} \approx \frac{F_0 t}{m_D}\left[1 - \frac{m_{T,0}}{m_D}(1 - t/\tau)\right]$$

Im ersten Term $v \sim tF_0/m_D$ erkennen wir die Geschwindigkeit für den konstant beschleunigten Dragster ohne Masseverlust. Der zweite Term stellt die erste Korrektur dazu dar.