Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung 04 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Punkte
Besprechung 20.11.2015

1. Fourierreihen (2 + 3 + 6 = 11 Punkte)

(a) Sei $f(t) \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f(t) e^{-in\omega t}$$
$$c_n^* = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f(t) e^{in\omega t} = c_{-n}$$

Wir definieren

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n) = c_n + c_{-n} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f(t)\cos(n\omega t)$$
$$b_n = 2\,\mathrm{Im}(c_n) = i(c_{-n} - c_n) = -\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f(t)\sin(n\omega t)$$

Daraus folgt $c_n = (a_n + ib_n)/2$ und $c_{-n} = (a_n - ib_n)/2$. Damit gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{-n}e^{-in\omega t} + c_n e^{in\omega t}\right] \\ &= c_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n - ib_n)e^{-in\omega t} + (a_n + ib_n)e^{in\omega t}\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) - b_n\sin(n\omega t) \end{aligned}$$

Wir sehen, dass sich für reelle Funktionen eine spezielle Formel ergibt, bei der die Koeffizienten rein reell sind.

(b) Sei $f(t) = f_g(t) + f_u(t)$ mit geradem und ungeradem Anteil.

(i) Nur gerade $f(t) = f_g(t) = f_g(-t)$ und nur ungerade $f(t) = f_u(t) = -f_u(-t)$. Dann folgen die Koeffizienten

$$c_{n,g} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f_g(t) e^{-in\omega t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f_g(t)\left[\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)\right] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f_g(t)\cos(n\omega t)$$
$$c_{n,u} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f_u(t) e^{-in\omega t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f_u(t)\left[\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)\right] = -\frac{i}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f_u(t)\sin(n\omega t)$$

Damit gilt $c_{n,g} = c_{-n,g}$ und $c_{n,u} = -c_{-n,u}$. Für die Reihen erhalten wir

$$f_g(t) = c_{0,g} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{-n,g}e^{-in\omega t} + c_{n,g}e^{in\omega t}\right] = c_{0,g} + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,g}\cos(n\omega t)$$
$$f_u(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{-n,u}e^{-in\omega t} + c_{n,u}e^{in\omega t}\right] = 2i\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,u}\sin(n\omega t)$$

Wir sehen, dass sich für gerade/ungerade (komplexe) Funktionen spezielle Formeln für die Fourierreihe ergeben. Nur die Hälfte der Koeffizienten muss berechnet werden.

(ii) Entsprechend für reelle gerade/ungerade Funktionen.

$$\begin{aligned}
a_{n,g} &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f_g(t)\cos(n\omega t) \neq 0 \\
b_{n,g} &= -\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f_g(t)\sin(n\omega t) = 0 \\
a_{n,u} &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f_g(t)\cos(n\omega t) = 0 \\
b_{n,u} &= -\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t f_g(t)\sin(n\omega t) \neq 0
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die obigen Formeln gilt dann:

$$\begin{aligned}
f_g(t) &= \frac{a_{0,g}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,g}\cos(n\omega t) \\
f_u(t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,g}\sin(n\omega t)
\end{aligned}$$

Im Bezug zur Aufgabe 1a) vereinfacht sich die Fourierreihe für reelle gerade/ungerade Funktionen noch weiter, da wir wiederum nur die Hälfte der Koeffiziente ausrechnen müssen.

(c) **ERSTE FUNKTION**

$$f_1(t) = \begin{cases} i & \text{für } 0 < t \leq \pi \\ -i & \text{für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}, \quad f_1(t+2\pi) = f_1(t)$$

Die Funktion f_1 ist ungerade, $T = 2\pi$ und $\omega = 1$. Daher

$$\begin{aligned}
c_{n,1} &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t f_1(t)\sin(nt) = \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}t\sin(nt) + \int_{0}^{\pi}\mathrm{d}t\sin(nt)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}t\sin(nt) = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \\
f_1(t) &= 2i\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,u}\sin(nt) = 2i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(nt)
\end{aligned}$$

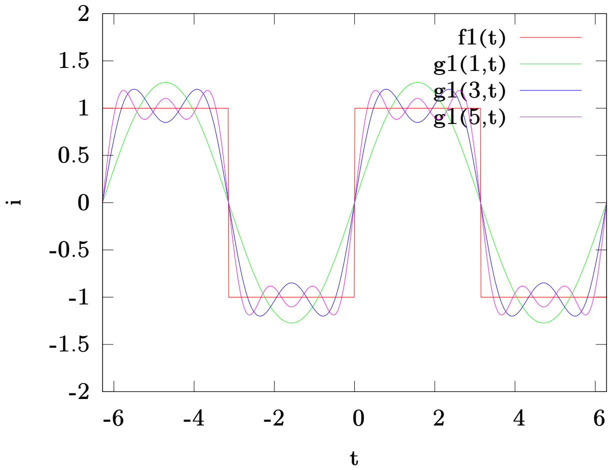

Abbildung 1: Plot von $f_1(t)$ (im Imaginären). Wir plotten die Reihe mit $N = 1,3,5$, da jeweils die geraden Terme verschwinden. Daher erhalten wir für $N = 1$ und $N = 2$ den selben Plot.

ZWEITE FUNKTION

$$f_2(t) = t \quad \text{für } t \in [0, 2\pi], \quad f_2(t + 2\pi) = f_2(t)$$

Die Funktion f_2 ist reell, $T = 2\pi$ und $\omega = 1$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t f_2(t) \cos(nt) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}t \; (2\pi + t) \cos(nt) + \int_{0}^{\pi} \mathrm{d}t \; t \cos(nt) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}t \; 2\pi \cos(nt) + \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; t \cos(nt) \right] = 2 \int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}t \; \cos(nt) = \frac{2 \sin(\pi n)}{n} = 0 \\
b_n &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t f_2(t) \sin(nt) = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}t \; (2\pi + t) \sin(nt) + \int_{0}^{\pi} \mathrm{d}t \; t \sin(nt) \right] \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}t \; 2\pi \sin(nt) + \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; t \sin(nt) \right] \\
&= \frac{n\pi \cos(n\pi) - \sin(n\pi)}{n^2 \pi} + \frac{2n\pi - n\pi \cos(n\pi) - \sin(n\pi)}{n^2 \pi} = \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir noch den Grenzwert $a_0 = \lim_{n \to 0} a_n = 2\pi$ berechnen (l'Hospital). Damit ergibt sich die Reihe

$$f_2(t) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$$

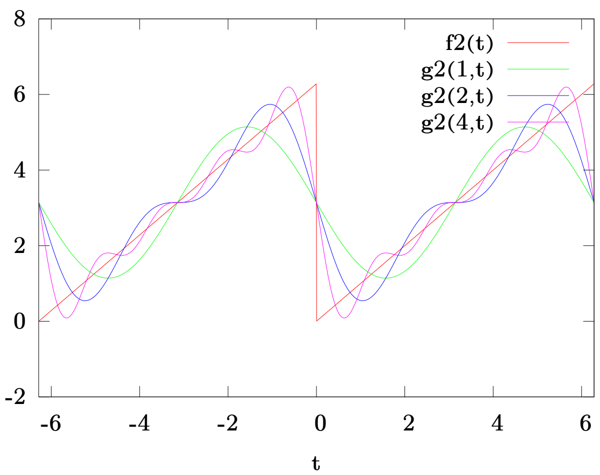

Abbildung 2: Plot von $f_2(t)$ für $N = 1, 2, 4$.

DRITTE FUNKTION

$$f_3(t) = |\sin t|$$

Die Funktion f_3 ist reell und gerade, $T = \pi$ und $\omega = 2$.

$$a_{n,g} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}t |\sin t| \cos(2nt) = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{d}t \sin t \cos(2nt) = \frac{4}{\pi - 4\pi n^2}$$

Damit ergibt sich die Reihe

$$f_3(t) = \frac{2}{\pi} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{\pi - 4\pi n^2}$$

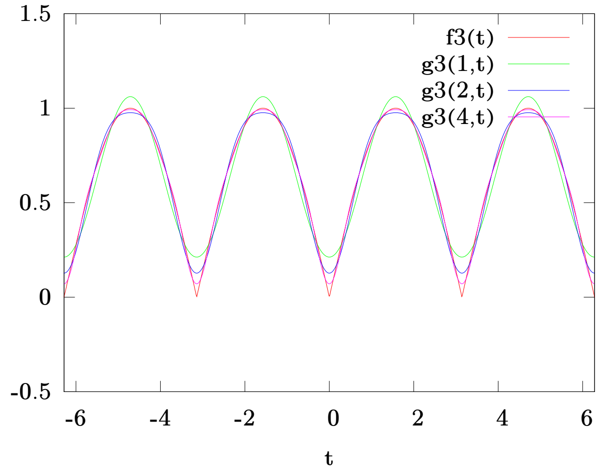

Abbildung 3: Plot von $f_3(t)$ für $N = 1, 2, 4$.

```
set terminal pdfcairo enhanced size 16cm,12cm font 'Computer Modern,20';

f1(t) = (t > 2*pi ? f1(t - 2*pi) :\
         (t < 0 ? f1(t + 2*pi) :\
          (t >= 0 && t < pi ? 1 : -1)))

c1(n) = (1 - cos(n*pi))/(n * pi)
g1(N,t) = 2*(sum [n=1:N] c1(n) * sin(n * t))

f2(t) = (t > 2*pi ? f2(t - 2*pi) :\
         (t < 0 ? f2(t + 2*pi) : t))

a2_0 = 2*pi
b2(n) = 2.0/n
g2(N,t) = a2_0 / 2 - sum [n=1:N] b2(n) * sin(n * t)

a3(n) = 4/(pi-4*pi*n*n)
f3(t) = abs(sin(t))
g3(N,t) = a3(0) / 2 + sum [n=1:N] a3(n) * cos(2 * n * t)

set yrange [-2:2]
set samples 1000
set xlabel "t"
set ylabel "i"
set output "theoa_blatt04_f1.pdf"
plot [t=-2*pi:2*pi] f1(t), g1(1,t), g1(3,t), g1(5,t)

set yrange [-2:8]
set samples 1000
set xlabel "t"
unset ylabel
set output "theoa_blatt04_f2.pdf"
plot [t=-2*pi:2*pi] f2(t), g2(1,t), g2(2,t), g2(4,t)

set yrange [-0.5:1.5]
set samples 1000
set xlabel "t"
unset ylabel
set output "theoa_blatt04_f3.pdf"
plot [t=-2*pi:2*pi] f3(t), g3(1,t), g3(2,t), g3(4,t)
```

Abbildung 4: Gnuplot-Code zum Erzeugen der Plots

2. Dragster mit Reibung $(2+1+1+3+1+1=9$ Punkte$)$

(a)

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F_0 + (m_{T,0}/\tau - \alpha)\, v}{m_D + m_{T,0} - m_{T,0}t/\tau} = \frac{\mu + \beta v}{\tau' - t}$$

mit $\mu = \tau F_0/m_{T,0}$, $\tau' = \tau(m_D + m_{T,0})/m_{T,0}$ und $\beta = 1 - \tau\alpha/m_{T,0}$. Nun gehen wir vor wie bei Aufgabe 3 vom letzten Blatt:

$$\begin{aligned}
&\int_0^v \frac{\mathrm{d}v'}{\mu + \beta v'} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{\tau' - t'}\\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\mu + \beta v}{\mu}\right) = -\ln\left(\frac{\tau' - t}{\tau'}\right)\\
\Rightarrow\quad & \ln\left(\frac{\mu + \beta v}{\mu}\right) = \ln\left[\left(\frac{\tau' - t}{\tau'}\right)^{-\beta}\right]\\
\Rightarrow\quad & v(t) = \frac{\mu}{\beta}\left[\left(\frac{1}{1 - t/\tau'}\right)^{\beta} - 1\right]\\
\Rightarrow\quad & v(t) = \frac{\tau F_0}{m_{T,0} - \alpha\tau}\left[\left(\frac{1}{1 - t/\tau'}\right)^{\left(1 - \frac{\alpha\tau}{m_{T,0}}\right)} - 1\right].
\end{aligned}$$

(b) Für $\alpha = 0$ finden wir

$$v(t) = \frac{\tau F_0}{m_{T,0}}\left[\left(\frac{1}{1 - t/\tau'}\right) - 1\right].$$

(c) Wir berechnen die zurückgelegte Strecke für $\alpha > 0$ und $\tau > 0$:

$$\begin{aligned}
x(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' v(t') &= \frac{\tau F_0}{m_{T,0} - \alpha\tau}\left[\frac{-\tau' m_{T,0}}{\alpha\tau}\left\{(1 - t/\tau')^{\frac{\alpha\tau}{m_{T,0}}} - 1\right\} - t\right]\\
&= -\frac{\tau F_0}{m_{T,0} - \alpha\tau}\left[\frac{m_D + m_{T,0}}{\alpha}\left\{(1 - t/\tau')^{\frac{\alpha\tau}{m_{T,0}}} - 1\right\} + t\right]
\end{aligned}$$

(d) Wir wissen $v \geq 0$ und damit $|v|v = v^2$. Die Bewgl. wird zu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{F_B + \gamma v^2}{m_D} = -\frac{\mu'^2 + v^2}{\xi} \tag{1}$$

Hier hat $\mu' = \sqrt{F_B/\gamma}$ die Dimension einer Geschwindigkeit und $\xi = m_D/\gamma$ die Dimension einer Länge (ξ wird häufig als Bezeichnung für Längenskalen genutzt).

$$\Rightarrow\quad \int_{v_\tau}^{v} \frac{\mathrm{d}v'}{\mu'^2 + v'^2} = -\int_\tau^t \frac{\mathrm{d}t'}{\xi}$$

Wir berechnen nun das Geschwindigkeitsintegral

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu'^2}\int_{v_\tau}^{v} \frac{\mathrm{d}v'}{1 + \left(\frac{v'}{\mu'}\right)^2} &= \frac{1}{\mu'}\int_{v_\tau/\mu'}^{v/\mu'} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \frac{1}{\mu'}\left[\arctan\frac{v}{\mu'} - \arctan\frac{v_\tau}{\mu'}\right]\\
&= \frac{1}{\mu'}\arctan\left[\frac{\mu'(v - v_\tau)}{\mu'^2 + v\, v_\tau}\right]
\end{aligned}$$

Damit finden wir dann

$$
\begin{aligned}
&\arctan\left[\frac{\mu'(v-v_\tau)}{\mu'^2+v\,v_\tau}\right] = -\frac{\mu'}{\xi}(t-\tau) \\
\Rightarrow\quad & v-v_\tau = -\frac{\mu'^2+v\,v_\tau}{\mu'}\tan\frac{\mu'(t-\tau)}{\xi} \\
\Rightarrow\quad & v(t) = \frac{v_\tau-\mu'\tan\frac{\mu'(t-\tau)}{\xi}}{1+\frac{v_\tau}{\mu'}\tan\frac{\mu'(t-\tau)}{\xi}}
\end{aligned}
$$

In den ursprünglichen Parametern ausgedrückt:

$$
v(t) = \frac{v_\tau - \sqrt{\frac{F_B}{\gamma}}\,\tan\left[\frac{\sqrt{F_B\gamma}}{m_D}(t-\tau)\right]}{1+\sqrt{\frac{\gamma}{F_B}}\,v_\tau\,\tan\left[\frac{\sqrt{F_B\gamma}}{m_D}(t-\tau)\right]} \tag{2}
$$

(e) Wann steht der Dragster?

$$
\begin{aligned}
& v(t_{\text{end}}) = 0 \\
\Rightarrow\quad & t_{\text{end}} = \tau + \frac{\xi}{\mu'}\arctan\frac{v_\tau}{\mu'}
\end{aligned}
$$

Bzw.

$$
t_{\text{end}} = \frac{m_D}{\sqrt{F_B\gamma}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma}{F_B}}\,v_\tau\right)+\tau
$$

(f) Wir wollen erneut die Konsistenz unseres Ergebnisses überprüfen, indem wir einen simplen Grenzfall mit bekannter Lösung betrachten. Ohne Reibung wirkt eine konstante Bremskraft und wir erwarten folgende Lösung für die Geschwindigkeit:

$$
v_0(t) = v_\tau - \frac{F_B}{m_D}(t-\tau).
$$

Wir betrachten nun den Grenzfall $\gamma \to 0$ in Gleichung (2). Betrachten wir zunächst den Nenner. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\gamma\to 0}\sqrt{\gamma/F_B} = 0 \\
&\lim_{\gamma\to 0}\tan\frac{\sqrt{\gamma F_B}(t-\tau)}{m_D} = 0
\end{aligned}
$$

Weiterhin gilt für zwei Funktionen mit Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, dass der Grenzwert ihres Produktes $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab$ ist. Der Nenner ist also unproblematisch, $\lim_{\gamma\to 0}(\text{Nenner}) = 1$. Betrachten wir nun den Zähler. Der zweite Term ist wieder von der Form $\lim_{\gamma\to 0}\cdots = \frac{0}{0}$. Wir verwenden also erneut die Regel von L'Hospital und berechnen den Grenzwert ($\alpha = \sqrt{F_B}(t-\tau)/m_D$ und $\beta = \sqrt{1/F_B}$):

$$
\lim_{\gamma\to 0}\frac{\tan(\alpha\sqrt{\gamma})}{\beta\sqrt{\gamma}} = \lim_{\gamma\to 0}\frac{\frac{\alpha\gamma^{-1/2}}{2\cos^2(\alpha\sqrt{\gamma})}}{\frac{1}{2}\beta\gamma^{-1/2}} = \lim_{\gamma\to 0}\frac{\alpha}{\beta\cos^2(\alpha\sqrt{\gamma})} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{F_B(t-\tau)}{m_D}
$$

Damit finden wir dann

$$
\lim_{\gamma\to 0} v(t) = v_\tau - \frac{F_B(t-\tau)}{m_D},
$$

was genau dem erwarteten Verhalten entspricht.