Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung 05 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Punkte
Besprechung 27.11.2015

1. Skalar- und Vektorfelder (2 + 3 = 5 Punkte)

(a) **Erstes Skalarfeld** $A(\boldsymbol{r})$

$$A(\boldsymbol{r}) = \frac{y}{a^2 + r^2}$$

Für eine Höhenlinie mit Wert c finden wir

$$c = \frac{y}{a^2 + r^2} \tag{1}$$

Zunächste betrachten wir $c = 0$. In diesem Fall ist $y = 0$ und x beliebig. Die erste Höhenlinie ist also die x-Achse. Sei nun $c \neq 0$.

$$\begin{aligned}(1) &\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{y}{c} = -a^2 \\ &\Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2} - a^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Da die linke Seite größer gleich Null ist, hat diese Gleichung nur Lösungen für $\beta^2 = \frac{1}{4c^2} - a^2 \geq 0$. Die Höhenlinien mit $c \neq 0$ sind dementsprechend Kreise mit Radius β und Mittelpunkt $(0, \frac{1}{2c})$.

Für das **zweite Skalarfeld** $B(\boldsymbol{r})$

$$B(\boldsymbol{r}) = e^{-r^2}$$

finden wir

$$x^2 + y^2 = -\ln c \tag{3}$$

Für $c < 1$ sind dies Kreise um $(0, 0)$ mit Radius $\sqrt{-\ln c}$.

(b) Die Vekttorfelder werden durch Vektoren an ausgewählten Punkten dargestellt. Zur besseren Übersichtlichkeit skalieren wir die Vektoren jeweils mit einem Faktor $s < 1$. Für einen Plot mittels Computer wählen wir gleichverteilte Punkte. Als Alternative kann man auch Punkte auf Linien konstanten Betrages wählen. Bei allen drei Vektorfeldern sind dies Kreise mit Mittelpunkt $(0, 0)$. Feldlinien eines Vektorfelde $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ sind definiert als Linien, die an jedem Punkt $\boldsymbol{r}$ die Tangente $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ haben. Für eine mit t parametrisierte Linie ergibt sich damit die DGL

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t)). \tag{4}$$

Die Lösungsschar dieser DGL ergeben die Feldlinien. Man kann dann z.B. alle Feldlinien zeichnen, die durch Punkte auf einer Linie (bzw. Fläche in höheren Dimensionen) konstanten Betrages hindruchgehen. In 2 Dimensionen kann man das Problem vereinfachen, da die Tangente die Steigung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ hat. Damit findet man

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{V_y(\boldsymbol{r})}{V_x(\boldsymbol{r})} \tag{5}$$

mit V_i der i-ten Komponente von $\boldsymbol{V}$.

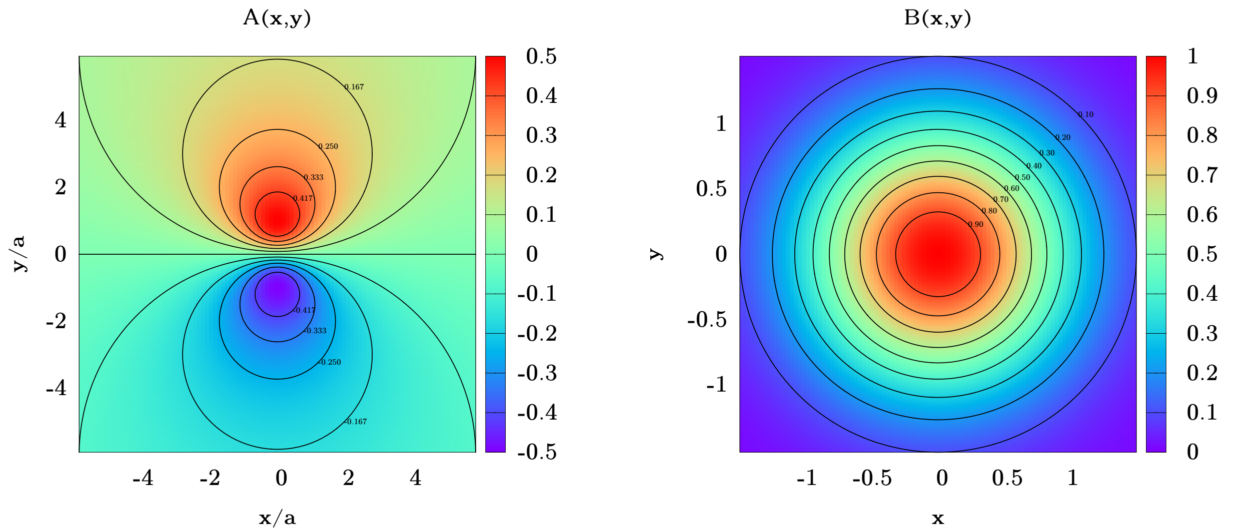

Abbildung 1: Höhenlinien Plot von $B(\boldsymbol{r})$.

Erstes Vektorfeld $C(\boldsymbol{r})$ Für Plot siehe 2. Die Feldlinien ergeben sich aus der DGL

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y^2 - x^2 = c \tag{6}$$

mit $c = \text{const.}$. Die Feldlinien sind also Hyperbeln.

Zweites Vektorfeld $D(\boldsymbol{r})$ Für Plot siehe 2. Die Feldlinien ergeben sich aus der DGL

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y^2 + x^2 = c \tag{7}$$

mit $c = \text{const.}$. Die Feldlinien sind also Kreise.

Drittes Vektorfeld $E(\boldsymbol{r})$ Für Plot siehe 2. Die Feldlinien ergeben sich aus der DGL

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = cx \tag{8}$$

mit $c = \text{const.}$. Die Feldlinien sind also Geraden.

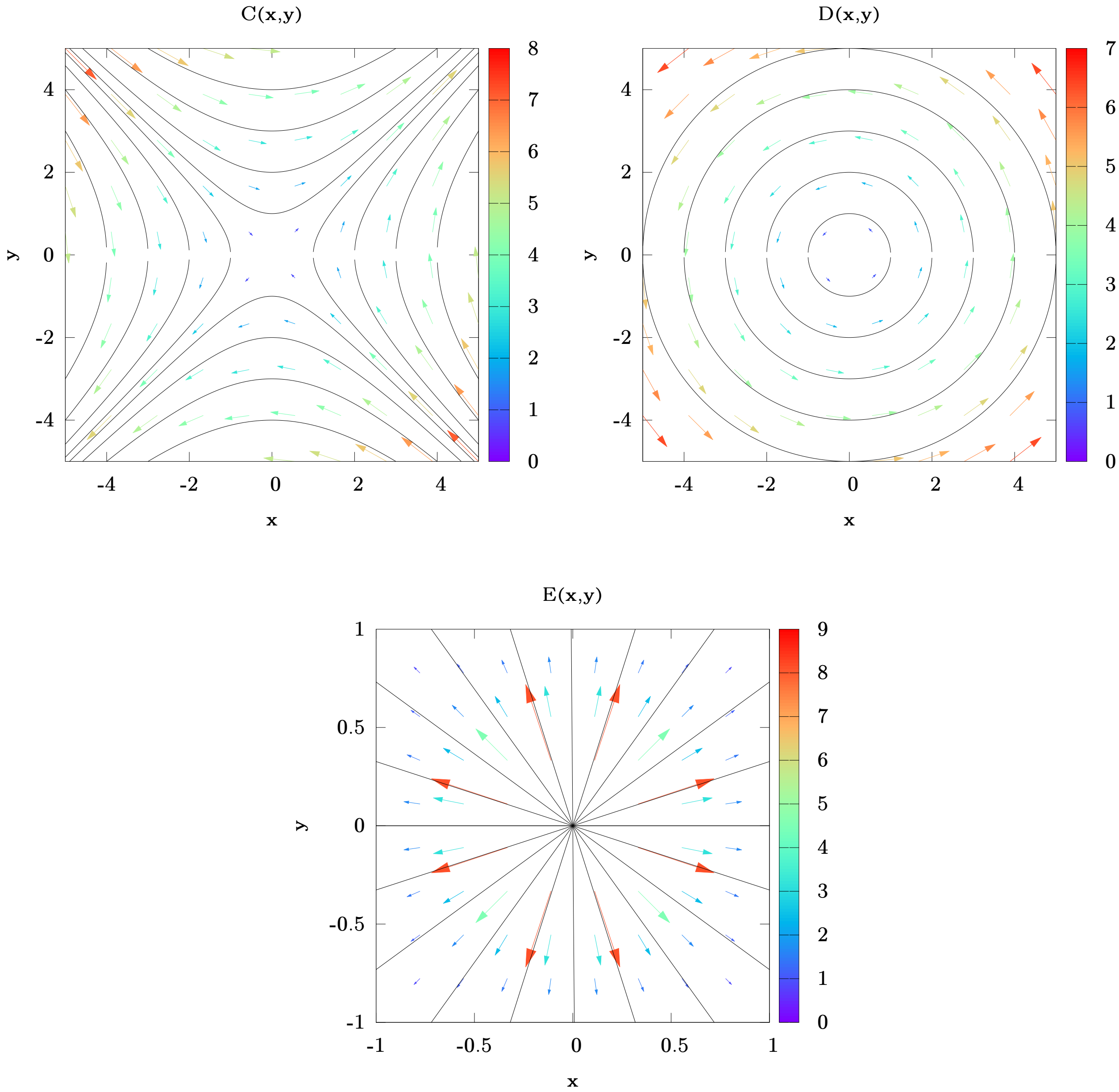

Abbildung 2: Plots der 3 Vektorfelder mit Feldlinien

2. Harmonischer Oszillator

$(1 + 2 + 1 + 1 + 3 = 8$ Punkte)

(a) Ansatz einsetzen:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1^+ e^{i\omega_0 t} + A_1^- e^{-i\omega_0 t} \\ \dot{x}_1(t) &= i\omega_0 A_1^+ e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 A_1^- e^{-i\omega_0 t} \\ \ddot{x}_1(t) &= -\omega_0^2 x_1(t) \\ \implies \ddot{x}_1(t) &+ \omega_0^2 x_1(t) = 0 \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen einsetzen:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_0 = A_1^+ + A_1^- \\ \dot{x}_1(0) &= v_{0,x} = i\omega_0 A_1^+ - i\omega_0 A_1^- \implies i\frac{v_{0,x}}{\omega_0} = A_1^- - A_1^+ \\ A_1^\pm &= \frac{x_0\omega_0 \mp i v_{0,x}}{2\omega_0} \end{aligned}$$

(b) Wir verwenden das Ergebnis der Aufgabe vorher:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1^+ e^{i\omega_0 t} + \left(A_1^+ e^{+i\omega_0 t}\right)^* = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{x_0\omega_0 - i v_{0,x}}{2\omega_0}\left(\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)\right)\right] \\ &= x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_{0,x}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) = x_4(t) \end{aligned}$$

Alternativ können wir das Ergebnis auch durch Einsetzen des rellen Ansatzes und Beachten der Anfangsbedingungen erhalten. Die Kosinusdarstellung erhalten wir durch

$$\begin{aligned} x_2(0) &= A_2 \cos\phi_2 = x_0 \\ \dot{x}_2(0) &= -A_2\omega_0 \sin\phi_2 = v_{0,x} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_2(0)}{x_2(0)} &= \frac{v_{0,x}}{x_0} = -\omega_0 \tan\phi_2 \\ \implies \phi_2 &= -\arctan\frac{v_{0,x}}{\omega_0 x_0} \\ \implies A_2 &= \frac{x_0}{\cos\phi_2} = x_0\sqrt{1 + \left(\frac{v_{0,x}}{\omega_0 x_0}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{0,x}}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned}$$

Wegen der Phasenbeziehung von Kosinus und Sinus (oder der entsprechenden Rechnung zu x_2 für x_3) folgt

$$\phi_3 = \phi_2 + \frac{\pi}{2} = \arctan\frac{\omega_0 x_0}{v_{0,x}}$$

Alle Konstanten sind damit bestimmt

$$\begin{aligned} A_2 &= A_3 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{0,x}}{\omega_0}\right)^2} \\ \phi_2 &= -\arctan\frac{v_{0,x}}{\omega_0 x_0}, \quad \phi_3 = \arctan\frac{\omega_0 x_0}{v_{0,x}} \\ C_4 &= x_0, \quad B_4 = \frac{v_{0,x}}{\omega_0} \end{aligned}$$

(c) Ansatz einsetzen:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1^+ e^{\lambda_0 t} + A_1^- e^{-\lambda_0 t} \\ \dot{y}_1(t) &= A_1^+ \lambda_0 e^{\lambda_0 t} - A_1^- \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \\ \ddot{y}_1(t) &= \lambda_0^2 y_1(t) \\ \implies \ddot{y}_1(t) &- \lambda_0^2 y_1(t) = 0 \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen einsetzen:

$$\begin{aligned} y_1(0) = y_0 &= A_1^+ + A_1^- \\ \dot{y}_1(0) = v_{0,y} &= \lambda_0 A_1^+ - \lambda_0 A_1^- \implies \frac{v_{0,y}}{\lambda_0} = A_1^+ - A_1^- \\ A_1^\pm &= \frac{y_0\lambda_0 \pm v_{0,y}}{2\lambda_0} \end{aligned}$$

(d) Wir verwenden die Lösung von vorher und ersetzen die Exponentialfunktionen durch cosh- und sinh-Linearkombinationen.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1^+ e^{\lambda_0 t} + A_1^- e^{-\lambda_0 t} = A_1^+ \left(\cosh(\lambda_0 t) + \sinh(\lambda_0 t)\right) + A_1^- \left(\cosh(\lambda_0 t) - \sinh(\lambda_0 t)\right) \\ &= (A_1^+ + A_1^-) \cosh(\lambda_0 t) + (A_1^+ - A_1^-) \sinh(\lambda_0 t) = y_0 \cosh(\lambda_0 t) + \frac{v_{0,y}}{\lambda_0} \sinh(\lambda_0 t) \end{aligned}$$

Wir sehen, dass das Ergebnis eine völlig analoge Form hat zu $x_4(t)$ der Aufgabe 1b), wobei $C_2 = y_0$ und $B_2 = v_{0,y}/\lambda_0$.

Anmerkung: Entsprechend kann man die Lösung auch auf die Form $A \cosh(\lambda_0 t + \phi)$ bringen, wobei

$$\phi = \operatorname{artanh} \frac{v_{0,y}}{y_0 \lambda_0} \,.$$

Auf dem dritten Blatt hatten wir den Zusammenhang zwischen den trigonometrischen und den Hyperbelfunktionen hergestellt, wobei sich gezeigt hat, dass die Hyperbelfunktionen cosh und sinh dem cos bzw. sin entsprechen, wenn man das Argument ins Imaginäre dreht (D.h. eine Drehung um $\pi/2$). Dies sieht man hier ebenfalls wieder.

(e) Aus dem Kraftfeld und der Newton'schen Gleichung erhalten wir

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m\ddot{\boldsymbol{r}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

Diese Gleichungen sind entkoppelt (unabhängig), d.h. wir erhalten

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \frac{\alpha}{m} x &= 0 \\ \ddot{y} - \frac{\beta}{m} y &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen entsprechen genau den Gleichungen vorher, wobei wir den harmonischen Oszillator für $\alpha, \beta < 0$ und den invertierten harmonischen Oszillator für $\alpha, \beta > 0$ erhalten.

Wir betrachten beispielhaft nur den Fall $\alpha < 0$ und $\beta > 0$, die weiteren Fälle setzen sich entsprechend zusammen. Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{x}(0) = v_{0,x}$ und $\dot{y}(0) = v_{0,y}$ erhalten wir

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_{0,x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ y_0 \cosh(\lambda_0 t) + \frac{v_{0,y}}{\lambda_0} \sinh(\lambda_0 t) \end{pmatrix}$$

mit den „Frequenzen"

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{-\alpha}{m}} \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$$

Bonusfrage: Die Fläche hat für $\alpha < 0$ die Form einer nach oben geöffneten Parabel und für $\alpha < 0$ die Form einer nach unten geöffneten Parabel. D.h. für $\alpha, \beta < 0$ erhält man einen nach oben geöffneten Paraboloid, für $\alpha < 0$ und $\beta > 0$ einen Art „Sattel". Dieses Thema wird später noch in der Vorlesung behandelt (Stichworte Energie, Potential und Gradient)!

3. Lineare Differentialgleichung (3 + 2 + 2 = 7 Punkte)

(a) Wir setzen den Ansatz $e^{\lambda x}$ in die DGL ein. Dies liefert

$$\left(\lambda^4 - 2\lambda^2 - 3\right) e^{\lambda x} = 0. \tag{9}$$

Da $e^\lambda x \neq 0$ folgt daraus die charakteristische Gleichung für die DGL

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 3 = 0. \tag{10}$$

Wir lösen die Gleichung zunächst für λ^2

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}(2 \pm 4) = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \tag{11}$$

Damit finden wir vier Lösungen für λ

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}, \qquad \lambda_{3,4} = \pm i \tag{12}$$

und die allgemeine Lösung für die DGL lautet

$$y(x) = a_1 e^{\sqrt{3}x} + a_2 e^{-\sqrt{3}x} + a_3 e^{ix} + a_4 e^{-ix} \tag{13}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$.

(b) Um die allgemeine reelle Lösung zu finden nutzen wir die Euler-Formel $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$

$$\begin{aligned} y(x) &= b_1 e^{\sqrt{3}x} + b_2 e^{-\sqrt{3}x} + (a_3 + a_4)\cos x + i(a_3 - a_4)\sin x \\ &= b_1 e^{\sqrt{3}x} + b_2 e^{-\sqrt{3}x} + b_1 \cos x + b_2 \sin x \end{aligned} \tag{14}$$

mit $b_i \in \mathbb{R}$.

(c) Zur Lösung des Anfangswertproblems (AWP) setzen wir die gegebenen Anfangsbedingungen in die allgemeine reelle Lösung ein und lösen nach den noch unbestimmten Parametern b_i auf.

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1 + b_2 + b_3 = 0 \tag{15a}$$
$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}(b_1 - b_2) + b_4 = 1 \tag{15b}$$
$$y''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(b_1 + b_2) - b_3 = 0 \tag{15c}$$
$$y'''(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{3}(b_1 - b_2) - b_4 = 1 \tag{15d}$$

Wir lösen zunächst durch simples umformen.

$$(15a) + (15c) \quad \Rightarrow \quad b_1 + b_2 = 0 \tag{16a}$$
$$(15b) + (15d) \quad \Rightarrow \quad 4\sqrt{3}(b_1 - b_2) = 2 \tag{16b}$$
$$3(15a) - (15c) \quad \Rightarrow \quad b_3 = 0 \tag{16c}$$
$$3(15b) - (15d) \quad \Rightarrow \quad 4b_4 = 2 \tag{16d}$$

Aus dem letzten Set lesen wir direkt ab

$$b_1 = -b_2 = \frac{1}{4\sqrt{3}} \tag{17a}$$

$$b_3 = 0 \tag{17b}$$

$$b_4 = \frac{1}{2} \tag{17c}$$

Die Lösung des AWP lautet damit

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(e^{\sqrt{3}x} - e^{-\sqrt{3}x}\right) + \frac{1}{2}\sin x \\ &= \frac{\sinh\sqrt{3}x}{2\sqrt{3}} + \frac{\sin x}{2} \end{aligned} \tag{18}$$