KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK www.tfp.kit.edu

Blatt 06 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön **20 Punkte**
Sebastian Zanker, Daniel Mendler **Besprechung 04.12.2015**

Abgabe jeweils bis spätestens Mittwoch 13:00 in den dafür vorgesehenen Kasten im Physik-Hochhaus.

1. Gedämpfter harmonischer Oszillator (1.5 + 1.5 = 3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie den harmonischen Oszillator mit Dämpfung besprochen. Dieser erfüllt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1}$$

Je nach Stärke der Dämpfung unterscheidet man zwischen drei Fällen mit den Lösungen

$$x(t) = e^{-\gamma t} \begin{cases} A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) & \text{für } \gamma < \omega_0 \\ A\cosh(\Omega t) + B\sinh(\Omega t) & \text{für } \gamma > \omega_0 \\ A + tB & \text{für } \gamma = \omega_0 \end{cases} \tag{2}$$

mit $\Omega = \sqrt{|\omega_0^2 - \gamma^2|}$.

(a) Gegeben seien die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Bestimmen Sie für alle drei Fälle die Konstanten A und B.

(b) Skizzieren Sie die drei Lösungen für den Fall $v_0 = 0$ und $x_0 = 1$.

2. Antwortfunktion (2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 9 Punkte)

Nach dem Einschwingvorgang, also für $t \gg \gamma^{-1}$, lautet die Lösung für den harmonisch mit einer Kraft $F(t) = mf_0 \cos\omega t$ getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillator

$$x(t) = f_0|\chi(\omega)|\cos(\omega t + \varphi(\omega)) \tag{3}$$

wobei

$$|\chi(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad \tan[\varphi(\omega)] = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{4}$$

Hier ist ω_0 die Eigenfrequenz des Oszillators, γ die Dämpfung und ω die Antriebsfrequenz. $\chi(\omega)$ ist die „Antwortfunktion“ des Oszillators auf eine Anregung mit Frequenz ω, und $\varphi(\omega)$ ist die Phasenverschiebung zwischen Oszillator und Antriebskraft.

(a) (i) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz ω_r, d.h. die Freqeunz, bei welcher die Amplitude $|\chi(\omega)|$ maximal wird. (ii) Wie groß ist die maximale Amplitude? (iii) Was passiert ohne Dämpfung (man nennt dieses Verhalten „Resonanzkatastrophe“)?

(b) Bestimmen Sie $|\chi(0)|$. Wie hängt $|\chi(\omega)|$ für sehr große Frequenzen $\omega \gg \max(\omega_0, \gamma)$ von ω ab?

(c) Skizzieren Sie $|\chi(\omega)|$ für (i) $\omega_0^2 \gg \gamma^2$ und (ii) $\omega_0^2 \ll \gamma^2$.

(d) Wir wollen nun $|\chi(\omega)|$ für sehr kleine Dämpfung $\gamma \ll \omega_0$ in der Nähe der Resonanzfrequenz untersuchen. In diesem Fall liegt die Resonanz nahe bei ω_0. Schreiben Sie daher $\omega = \delta\omega + \omega_0$ mit $\delta\omega \ll \omega_0$. Setzen Sie dies in den Nenner von $|\chi(\omega)|^2$ ein und vernachlässigen Sie alle Terme dritter und höherer Ordnung in kleinen Parametern, d.h. Terme der Form

$$\delta\omega^3,\ \delta\omega^4,\ \delta\omega^2\gamma^2,\ \delta\omega\gamma^2,\ \ldots$$

um eine Näherung für $|\chi(\omega)|$ zu erhalten.

(e) Für die genäherte Funktion liegt das Maximum bei ω_0. Bestimmen Sie die Breite der Resonanzkurve (in der genäherten Form), d.h. die Werte von ω bei denen die Amplitude auf $\frac{1}{\sqrt{2}}|\chi(\omega_0)|$ abgefallen ist.

(f) Fügen Sie zu Ihrer Skizze aus (c) eine Skizze der genäherten Funktion für $\omega^2 \gg \gamma^2$ hinzu.

3. Attraktion auf der Karlsruher Mess' $(2 + 2 + 1 + 2 + 1 = 8$ Punkte)

Statt das Aufgabenblatt zu lösen, haben Sie sich entschlossen auf die Karlsruher Mess' zu gehen. Dort fällt ihnen eine Attraktion auf, bei dem die Fahrgäste am Ende eines langen starren Pendels in der Fahrgastzelle festgeschnallt werden. Spannenderweise macht das Pendel sogar volle Umdrehungen. Bevor Sie mitfahren, beschließen Sie aus Sicherheitsgründen, dass Sie zuerst die Physik des Systems verstehen wollen.

Nehmen Sie an, dass der Arm des Pendels die Länge l und vernachlässigbare Masse hat. Die Fahrgastzelle selbst habe die Masse m. Die Fahrgastzelle ist Luftreibung $\boldsymbol{F} = -2\gamma m \boldsymbol{v}$ ausgesetzt. Der Motor lenkt das Pendel um den Winkel $\phi(0) = \phi_0$ aus, anschließend schwingt das Pendel frei. Der Auslenkungswinkel sei zur vertikalen gemessen, beträgt folglich 0 in der Ruheposition.

(a) Leiten Sie aus der Newtonschen Bewegungsgleichung eine Differentialgleichung für den Auslenkungswinkel $\phi(t)$ in Abhängigkeit von g, l und γ her.

(b) Nähern Sie die Gleichung für kleine Auslenkungen um den Ruhepunkt $\phi \approx 0$. Welche Differentialgleichung erhalten Sie? Mehr Sorge bereitet Ihnen jedoch das Verhalten um den höchsten Punkt $\phi \approx \pi$. Daher nähern Sie im Vergleich dazu die Gleichung für kleine Auslenkungen um den höchsten Punkt. Welche Differentialgleichung erhalten Sie dann?

(c) Lösen Sie die genäherte Differentialgleichung um $\phi \approx 0$ mit dem Exponentialansatz $e^{\lambda t}$.

(d) Das Pendel schwingt nun mit einer Amplitude ϕ_0 um die Ruhelage. Nach N Schwingungen nimmt die Amplitude auf ϕ_N ab. Bestimmen Sie daraus γ und die Frequenz Ω des Pendels.

(e) Nehmen Sie an, dass nach 100 Schwingungen die Amplitude halbiert wurde. Wie groß ist der *relative* Fehler von Ω, wenn die Luftreibung vernachlässigt wird ($\gamma = 0$)?