KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK www.tfp.kit.edu

Lösung 06 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Punkte
Besprechung 04.12.2015

1. Gedämpfter harmonischer Oszillator (1.5 + 1.5 = 3 Punkte)

(a) Gegeben ist die Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t} \begin{cases} A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) & \text{für } \gamma < \omega_0 \\ A\cosh(\Omega t) + B\sinh(\Omega t) & \text{für } \gamma > \omega_0 \\ A + tB & \text{für } \gamma = \omega_0 \end{cases} \tag{1}$$

und damit gilt für alle 3 Fälle

$$x(0) = x_0 = A \tag{2}$$

Wir berechnen die Geschwindigkeit:

$$\dot{x}(t) = -\gamma\, x(t) + e^{-\gamma t} \begin{cases} -A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t) \\ A\Omega\sinh(\Omega t) + B\Omega\cosh(\Omega t) \\ B \end{cases} \tag{3}$$

Damit finden wir

$$v_0 = -\gamma A + \begin{cases} \Omega B \\ \Omega B \\ B \end{cases} = -\gamma x_0 + B \begin{cases} \Omega \\ \Omega \\ 1 \end{cases} \tag{4}$$

Daraus folgt dann

$$B = (\gamma x_0 + v_0) \begin{cases} 1/\Omega \\ 1/\Omega \\ 1 \end{cases} \tag{5}$$

(b) Nun sei $x_0 = 1$ und $v_0 = 0$. Dann haben wir

$$A = 1 \tag{6}$$

$$B = \begin{cases} \gamma/\Omega \\ \gamma/\Omega \\ \gamma \end{cases} \tag{7}$$

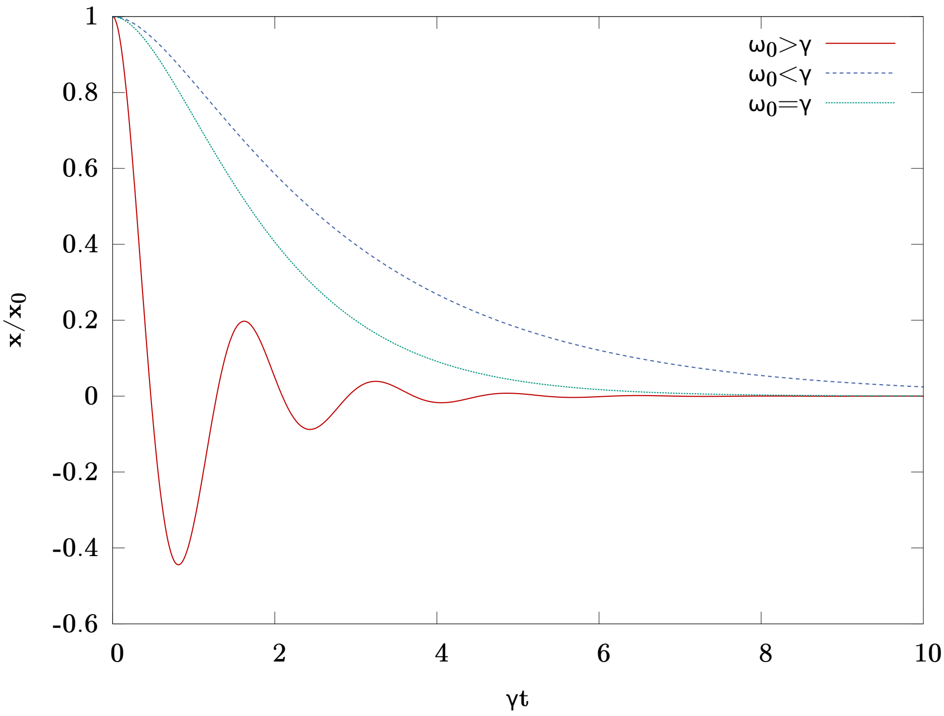

Abbildung 1: Plot zu Aufgabe 1b)

2. Antwortfunktion $(2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 9$ Punkte)

(a) (i) Wir bestimmen Extremalpunkte:

$$\frac{\mathrm{d}|\chi(\omega)|}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\right]^{1/2} = \frac{-2\omega(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2)}{[(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2]^{3/2}} = 0$$
$$\Rightarrow \text{(a) } \omega = 0 \quad \text{oder} \quad \text{(b) } \omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2 = 0$$

Damit findet man 3 Lösungen

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_\pm = \pm\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}. \tag{8}$$

Wir müssen noch bestimmen, ob es sich um Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte handelt. Dazu betrachten wir das Vorzeichen von $|\chi|'$. Der Nenner ist immer größer als 0. Wir betrachten daher nur den Zähler. Für den zweiten Faktor gilt

$$(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2) > 0 \text{ für } \omega^2 > \omega_\pm^2$$
$$(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2) < 0 \text{ für } \omega^2 < \omega_\pm^2$$

Zusammen mit dem Vorzeichen des ersten Faktors -2ω finden wir folgende Vorzeichen für $|\chi|'$:

$$\text{“}+\text{“ für } \omega < \omega_- \tag{9}$$
$$\text{“}-\text{“ für } \omega_- < \omega < 0 \tag{10}$$
$$\text{“}+\text{“ für } 0 < \omega < \omega_+ \tag{11}$$
$$\text{“}-\text{“ für } \omega_+ < \omega \tag{12}$$

Für $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ liegt also ein Tiefpunkt bei ω_1 und jeweils ein Hochpunkt bei $\omega_\pm$ vor. Für positive Frequenzen liegt damit die Resonanz bei $\omega_r = \omega_+ = \sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$ und damit *nicht* bei der Frequenz $\Omega = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ des freien gedämpften Oszillators. Für $\omega_0^2 < 2\gamma^2$ werden $\omega_\pm$ rein imaginär und es liegt nur ein Maximum (die beiden VZ-Wechsel in der Mitte verschwinden) bei ω_1 vor.

(ii) Wir bestimmen $|\chi(\omega_r)|$:

$$|\chi(\omega_r)| = \frac{1}{2\gamma\,(\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}} \tag{13}$$

(iii) Ohne Dämpfung wird die Amplitude unendlich groß, daher „Resonanzkatastrophe“. Für reale Systeme sollte man aber beachten, dass die Näherung einer linearen Kraft für große Auslenkungen meistens nicht mehr erfüllt ist und die Betrachtung als harmonischer Oszillator nicht mehr korrekt ist.

(b) (i) Für $\omega = 0$ finden wir

$$|\chi(0)| = \frac{1}{\omega_0} \tag{14}$$

(ii) Für große Frequenzen $\omega \gg \gamma$ und $\omega \gg \omega_0$ sind nur noch die Terme mit der höchsten Potenz in ω wichtig. Damit findet man

$$|\chi(\omega \to \infty)| \propto \frac{1}{\omega^2} \to 0 \tag{15}$$

(c) Mit den vorher (in a)i) und b)) festegestellten Eigenschaften von $|\chi(\omega)|$ ist es einfach, die Amplitude in den beiden vorgegebenen Parameter Bereichen zu skizzieren. Siehe Abb. 2.

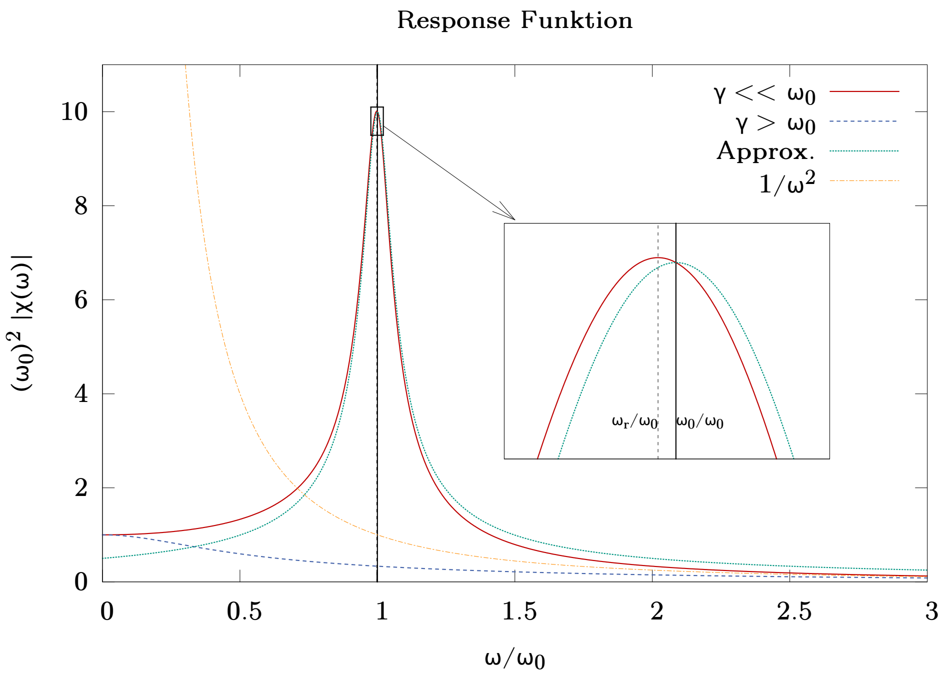

Abbildung 2: Plot zu Aufgabe 2c) und 2f)

(d) Wir interessieren uns für die Resonanzkurve bei sehr kleiner Dämpfung $\gamma \ll \omega_0$. In diesem Fall ist die Resonanzfrequenz

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \approx \omega_0. \tag{16}$$

Wir wollen nun die Amplitude in der Nähe der Resonanz untersuchen. Dazu schreiben wir $\omega = \delta\omega + \omega_0$ mit $\delta\omega \ll \omega_0$ und setzen dies in den Nenner von $|\chi(\omega)|^2$ ein:

$$\begin{aligned}
(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 &= (\omega_0^2 - 2\omega_0\delta\omega + \delta\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0 + \delta\omega)^2 \\
&= 4\omega_0^2\delta\omega^2 - \underline{4\omega_0\delta\omega^3} + \underline{\delta\omega^4} + 4\gamma^2\omega_0^2 + \underline{8\omega_0\gamma^2\delta\omega} + \underline{4\gamma^2\delta\omega^2} \\
&\approx 4\omega_0^2\delta\omega^2 + 4\gamma^2\omega_0^2 = 4\omega_0^2[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2]
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass γ und $\delta\omega$ kleine Parameter sind. Entsprechend sind Produkte höherer Ordnung in diesen Parametern noch kleiner. Wie in der Aufgabe vorgegeben vernachlässigen wir Terme der 3. Ordnung und höher (unterstrichene Terme). Damit finden wir die genäherte Amplitude

$$|\chi(\omega)| \approx |\tilde{\chi}(\omega)| = \frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\right]^{1/2} \tag{17}$$

(e) Wir berechnen die Breite des Peaks der genäherten Funktion. Der Einfachheit halber rechnen wir mit der quadrierten Funktion. Der Wert bei ω_0 beträgt

$$|\tilde{\chi}(\omega_0)|^2 = \frac{1}{4\omega_0^2\gamma^2} \tag{18}$$

Dann muss für die Frequenz ω_h, bei der der Wert um die Hälfte abgesunken ist, gelten

$$\frac{1}{4\omega_0^2[(\omega_h-\omega_0)^2+\gamma^2]} = \frac{1}{8\omega_0^2\gamma^2} \tag{19}$$

Damit finden wir

$$\omega_h = \omega_0 \pm \gamma. \tag{20}$$

Die Breite des Peaks ist dann gegeben durch γ.

(f) Siehe Abbildung 2. Man sieht, dass genäherte und exakte Funktion in der Nähe des Maximums gut übereinstimmen. Wenn man näher heranzoomt sieht man den Unterschied zwischen Resonanzfrequenz ω_r (gestrichelte) und ω_0 (durchgezogene Linie). Dennoch ist die Näherung über einen relativ großen Bereich von ω sehr gut.

3. Attraktion auf der Karlsruher Mess' (2 + 2 + 1 + 2 + 1 = 8 Punkte)

(a) Die Kraft, Geschwindigkeit und Beschleunigung liegen alle tangential auf der Kreisbahn des Pendels.

$$F_{\text{tangential}} = m \cdot a_{\text{tangential}} \tag{21}$$

$$-mg\sin(\phi(t)) - 2\gamma ml\dot{\phi}(t) = ml\ddot{\phi}(t) \tag{22}$$

$$l\ddot{\phi}(t) + 2\gamma l\dot{\phi}(t) + g\sin(\phi(t)) = 0 \tag{23}$$

Liebe Tutoren, bitte macht hier eine Skizze!

(b) Für kleine Winkel um die Ruhelage erhalten wir wegen $\sin x \approx x$

$$l\ddot{\phi}(t) + 2\gamma l\dot{\phi}(t) + g\phi(t) = 0 \tag{24}$$

Das ist die Gleichung des harmonischen Oszillators mit Dämpfung γl. Entsprechend erhalten wir für kleine Winkel um den höchsten Punkt

$$l\ddot{\phi}(t) + 2\gamma l\dot{\phi}(t) + g(\pi - \phi(t)) = 0 \tag{25}$$

$$l\ddot{\phi}(t) + 2\gamma l\dot{\phi}(t) - g\phi(t) = -g\pi \tag{26}$$

Das ist die Gleichung des invertierten harmonischen Oszillators mit zusätzlicher konstanter Kraft $-mg\pi$ und Dämpfung γl.

(c) Mit dem Exponentialansatz $\phi(t) = e^{\lambda t}$ erhalten wir für kleine Dämpfungen

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{g}{l} = 0 \implies \lambda_\pm = -\gamma \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{g}{l}-\gamma^2}}_{\text{reell}} \tag{27}$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $\phi(t) = Ae^{-\gamma t + i\Omega t} + Be^{-\gamma t - i\Omega t}$ mit $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \gamma^2}$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen

$$\phi(0) = A + B = \phi_0 \implies B = \phi_0 - A \tag{28}$$

$$\dot{\phi}(0) = A(-\gamma + i\Omega) + B(-\gamma - i\Omega) = 0 \implies A = \frac{\phi_0}{2}\left[1 - i\frac{\gamma}{\Omega}\right], B = A^* \tag{29}$$

erhalten wir die Lösung $\phi(t) = 2e^{-\gamma t}\,\mathrm{Re}\left(Ae^{i\Omega t}\right) = \phi_0 e^{-\gamma t}\left[\cos(\Omega t) + \frac{\gamma}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]$.

(d) Es sei $\phi(0) = \phi_0$ und $\phi_N = \phi(2\pi N/\Omega) = \phi_0 e^{-\gamma\frac{2\pi N}{\Omega}}$. Daraus folgt mit $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \gamma^2}$

$$\gamma = \frac{\Omega}{2\pi N}\ln\frac{\phi_0}{\phi_N} \tag{30}$$

$$\implies \gamma^2 = \Omega^2\left(\frac{\ln(\phi_0/\phi_N)}{2\pi N}\right)^2 = \left(\frac{g}{l} - \gamma^2\right)\left(\frac{\ln(\phi_0/\phi_N)}{2\pi N}\right)^2 \tag{31}$$

$$\implies \gamma^2 = \frac{g}{l}\frac{1}{\left(\frac{2\pi N}{\ln(\phi_0/\phi_N)}\right)^2 + 1} \qquad \Omega^2 = \frac{g}{l}\frac{1}{\left(\frac{\ln(\phi_0/\phi_N)}{2\pi N}\right)^2 + 1} \tag{32}$$

(e) Es sei $\phi_0/\phi_N = 2$ für $N = 100$. Ohne Dämpfung erhalten wir die Frequenz $\Omega_0 = \sqrt{g/l}$. Der relative Fehler von Ω und Ω_0 beträgt

$$\left|\frac{\Omega_0 - \Omega}{\Omega_0}\right| = \left|1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\ln 2}{200\pi}\right)^2 + 1}}\right| \approx 6 \times 10^{-7}\,. \tag{33}$$

Die Frequenzänderung durch die Luftreibung ist daher vernachlässigbar. Berechnet man den Fehler von Ω_0, dann erhält man

$$\left|\frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega}\right| = \left|1 - \sqrt{\left(\frac{\ln 2}{200\pi}\right)^2 + 1}\right| \approx 6 \times 10^{-7}\,. \tag{34}$$

Die beiden relativen Fehler sind so ähnlich, da diese so klein sind.