Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Lösung 09 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön **20 Punkte**
Sebastian Zanker, Daniel Mendler **Besprechung 15.01.2016**

1. Drude-Leitfähigkeit

$(2 + 2 + 3 + (2 + 4) = 7 + (6)$ Punkte)

(a) Wir kennen bereits die Green'sche Funktion

$$G(t - t') = \Theta(t - t')e^{-\alpha(t-t')}. \tag{1}$$

für die DGL

$$\dot{v} + \alpha v = f(t). \tag{2}$$

Setzen wir $\alpha = \tau^{-1}$, so lässt sich die DGL des Drude Modells mit dieser DGL identifizieren, wobei $f(t) = \frac{e}{m}E(t)$. Damit finden wir die Lösung

$$v(t) = \int_{\infty}^{\infty} dt'\, G(t - t')f(t') = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} dt'\, E(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \tag{3}$$

für die Geschwindigkeit, bzw.

$$j(t) = env(t) = \frac{ne^2}{m}\int_{-\infty}^{t} dt'\, E(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \tag{4}$$

für die Stromdichte. Damit ist die Leitfähigkeit im Drude-Modell

$$\sigma(t) = \frac{ne^2}{m}\,\Theta(t)e^{-t/\tau}. \tag{5}$$

(b) Wir haben

$$j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \sigma(t - t')E(t'). \tag{6}$$

Die ist die Faltung von elektrischem Feld $E(t)$ und Leitfähigkeit $\sigma(t)$. Damit folgt mittels Faltunstheorem direkt

$$j(\omega) = E(\omega)\sigma(\omega). \tag{7}$$

Auch die Foruiertransformierte von $\sigma(t)$ haben wir bereits auf dem letzten Blatt berechnet. Sie lautet

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{\tau^{-1} + i\omega} = \frac{ne^2}{m}\frac{\tau^{-1} - i\omega}{\tau^{-2} + \omega^2}. \tag{8}$$

(c) Wir lösen die DGL nun mittels Fouriertransformation. Wir gehen wieder von der in Gleichung (**??**) aus ($\alpha = 1/\tau$ und $f(t) = eE(t)/m$). Setzen wir nun die Fouriertransformierten direkt in die Gleichung ein, finden wir

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)\int \frac{d\omega}{2\pi}\, v(\omega)e^{i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, f(\omega)e^{i\omega t}. \tag{9}$$

Vertauschen wir nun Ableitung und Integral finden wir

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\, (i\omega + \alpha)\, v(\omega)e^{i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, f(\omega)e^{i\omega t} \tag{10}$$

und damit

$$(i\omega + \alpha)\, v(\omega) = f(\omega) \tag{11}$$

bzw.

$$v(\omega) = \frac{f(\omega)}{i\omega + \alpha} = \frac{e}{m}\frac{1}{i\omega + \alpha}E(\omega) = \frac{1}{en}\sigma(\omega)E(\omega). \tag{12}$$

mit $\sigma(\omega)$ wie in (b).

(d) Auch hier berechnen wir eine bereits bekannte Funktion, nämlich die Fouriertransformierte der Green'schen Funktion (siehe Blatt 8, A1). Zur Bestimmung der Green'schen Funktion setzen wir $E(t) = \frac{m}{e}\delta(t)$ und erhalten die DGL

$$\dot{v} + \alpha v = \delta(t), \tag{13}$$

welche natürlich die Green'sche Funktion als Lösung hat. Wir wissen, dass

$$v(\omega) = \sigma(\omega)E(\omega). \tag{14}$$

Wir benötigen also lediglich die FT des elektrischen Feldes

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{m}{e}\delta(t)e^{-i\omega t} = \frac{m}{e}. \tag{15}$$

Damit finden wir das bereits bekannte Ergebnis

$$v(\omega) = \frac{e}{m}\frac{m}{e}\frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{1}{\alpha + i\omega}. \tag{16}$$

(e) Sei nun $E(t) = E_0$. Die Gleichstromleitfähigkeit ergibt sich zu

$$\sigma_0 = \lim_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\tau \tag{17}$$

Wir wollen nun die Gleichstromleitfähigkeit bestimmen. Dazu nutzen wir zuerst direkt Gleichung (2) vom Aufgabenblatt:

$$j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \sigma(t-t')E_0 = \frac{ne^2}{m}E_0\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-\frac{t-t'}{\tau}} = \frac{ne^2\tau}{m}E_0$$

Führ den zweiten Weg mittels Fouriertransformation benötigen wir zuerst $E(\omega)$:

$$E(\omega) = \int dt\, E_0 e^{-i\omega t} = 2\pi E_0\delta(\omega). \tag{18}$$

Damit finden wir mit der Drude Formel

$$j(\omega) = \sigma(\omega)E(\omega) = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{\tau^{-1} + i\omega}2\pi E_0\delta(\omega) \tag{19}$$

Nun müssen wir noch die inverse FT durchführen:

$$j(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} j(\omega)e^{i\omega t} = \frac{ne^2\tau}{m}E_0. \tag{20}$$

Wie erwartet stimmen die beiden Ergebnisse überein. Je nach Form des elektrsichen Feldes kann aber eine der beiden Herangehensweisen deutlich besser zu rechnen sein.

2. Potenziale, Gradient und Kraftfelder $(2 + 1 + 1 + (2) = 4 + (2)$ Punkte)

(a) (Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{e}_i$ einen Einheitsveckctor in i-Richtung)

$$\text{(i)}\quad \frac{\partial}{\partial x_i}r = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{1/2} = \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-1/2}\right]\cdot 2x_i = \frac{x_i}{r}$$

$$\text{(ii)}\quad \nabla r = \sum_i \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}r = \sum_i \frac{x_i\boldsymbol{e}_i}{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{e}_r$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{\partial}{\partial x_i}f(r) = \frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r)\frac{x_i}{r}$$

$$\text{(iv)}\quad \nabla f(r) = f'(r)\boldsymbol{e}_r$$

(b) Das Kraftfeld eines Potenzials $V(r)$, das nur vom Abstand r abhängt, lässt sich mittels a)(iv) berechnen:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(r) = -V'(r)\boldsymbol{e}_r = -V'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{21}$$

Für ein $1/r$ Potenzial gilt

$$V'(r) = \frac{d}{dr}\frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{r^2} \tag{22}$$

und damit

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\alpha \boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\alpha}{r^2}\boldsymbol{e}_r. \tag{23}$$

(c) Das Potential lässt sich hier erraten:

$$V(x_1) = \frac{k}{2}x_1^2 + V_0 \tag{24}$$

mit $V_0 = const.$. Das dieses Potential die korrekte Kraft gibt lässt sich mittels Nachrechnen prüfen:

$$F(x_1) = -\frac{d}{dx_1}V(x_1) = kx_1. \tag{25}$$

Formal lässt sich das Potential mittels Integration aus der Kraft bestimmen:

$$V(x_1) = -\int_{x_{1,0}}^{x_1} dx'\, F(x_1) = \frac{k}{2}x_i^2 - \frac{k}{2}x_{1,0}^2 = \frac{k}{2}x_1^2 + V_0 \tag{26}$$

(d) Auch das Yukawa-Potenzial hängt nur vom Abstand r ab. Wir finden

$$V_Y'(r) = -\frac{\alpha}{r}\left(\frac{1}{r} + \gamma\right) e^{-\gamma r} \tag{27}$$

und

$$\boldsymbol{F} = \frac{\alpha\,(1+\gamma r)\, e^{-\gamma r}}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{28}$$

3. Teilchen im quartischen Potenzial $(1+1+1+2+4+(4) = 9+(4)$ Punkte)

Ein Teilchen der Masse m und Energie E bewege sich im Potenzial $V(x) = -ax^4 + bx^2$ mit $a, b > 0$. Für kleine Energien und kleine $|x|$ kennen wir die Lösung des Problems. Es ergibt sich mit $V(x) \approx bx^2$ der harmonische Oszillator, der bereits ausgiebig besprochen wurde.

(a) Skizze:

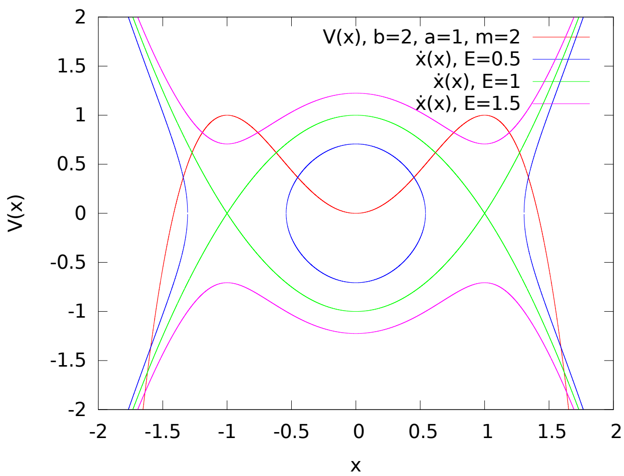

Abbildung 1: Skizze des Potentials $V(x)$ und von $\dot{x}(x)$ für unterschiedliche Energien für Aufgabe 3 (f)

(b) Hochpunkte $E_{max} = V(\pm|x_{max}|)$ des Potenzials:

$$\frac{d}{dx}V(x) = -4ax^3 + 2bx = 0 \tag{29}$$

$$x_\pm = \pm\sqrt{\frac{b}{2a}} \tag{30}$$

Wir finden die Maximalpunkte $x = 0$ und $x_\pm = \pm\sqrt{\frac{b}{2a}} = \pm|x_{max}|$. Bei $x = 0$ ist ein lokales Minimum, bei $x_\pm$ sind Maxima.

$$E_{max} = V(\pm|x_{max}|) = V(|x_{max}|) = -a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + b\frac{b}{2a} = \frac{b^2}{4a} \tag{31}$$

(c) Gleichung für die Energie des Teilchens:

$$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - ax^4 + bx^2 \tag{32}$$

(d) Auflösen nach $\dot{x}$:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - ax^4 + bx^2 \tag{33}$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + ax^4 - bx^2\right)} \tag{34}$$

Der Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens ist durch die Energie festgelegt. Allerdings ist das $\pm$ wichtig, da die Richtung der Geschwindigkeit eine Rolle spielt und erstmal nicht festgelegt ist. Aufstellen des Integrals $x(t)$ mittels Separation der Variablen, wobei $x_i = x(t_i)$

$$t_1 - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{E + ax^4 - bx^2}} \tag{35}$$

Wir setzen im folgenden $t_0 = 0$ und $t_1 = t$.

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{E + ax^4 - bx^2}} \tag{36}$$

Wegen $t > 0$ folgt für negative Geschwindigkeit $x_1 < x_0$ und für positive Geschwindigkeit $x_0 < x_1$.

(e) Sei nun die Energie des Teilchens $E = E_{max}$.

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4a} + ax^4 - bx^2}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2a}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + x^4 - \frac{b}{a}x^2}} \tag{37}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{m}{2a}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \frac{b}{2a})^2}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2a}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{|x^2 - x_{max}^2|} \tag{38}$$

Wir substituieren mit $y = x/|x_{max}|$, $y_i = x_i/|x_{max}|$. Das ist die Normierung des Orts auf die Breite der Potentialmulde! Im folgenden verwenden wir nur noch y.

$$t = \pm\frac{1}{x_{max}}\sqrt{\frac{m}{2a}}\int_{y_0}^{y_1}\frac{dy}{|y^2 - 1|} \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

Das Teilchen kann sich nun entweder innerhalb des Potentialtopfes oder außerhalb bewegen. Man muss daher bei der Integration darauf achten, dass die beiden Fälle $|y| < 1$ (In der Mulde) und $|y| > 1$ (Außerhalb der Mulde) berücksichtigt werden. Das Teilchen kann die ganze Zeit entweder nur in der Potentialmulde oder außerhalb sein, da die Energie genau E_{max} entspricht. Daher reicht es wenn wir die Fälle $|y_0| < 1$ und $|y_0| > 1$ betrachten. (Den Punkt $|y_0| = 1$, also wenn sich das Teilchen genau am Maximum befindet, schließen wir aus. In dem Fall bleibt das Teilchen für immer an diesem labilen Punkt liegen. Die Gleichungen gelten nicht wegen Division durch 0.)

$$|y| > 1: \quad t = \tau \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y^2 - 1} \tag{41}$$

$$|y| < 1: \quad t = -\tau \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y^2 - 1} \tag{42}$$

$$\tau = \pm \frac{1}{x_{max}} \sqrt{\frac{m}{2a}} \tag{43}$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1} = \frac{y(A+B) + (A-B)}{y^2 - 1} \tag{44}$$

$$\implies A + B = 0 \wedge A - B = 1 \implies \frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] \tag{45}$$

Wir integrieren die beiden Fälle (Beachte, dass die Logarithmen alle reell sind):

$$y > 1: \quad \tau \int \frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{\tau}{2} \int dy \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] \tag{46}$$

$$= \frac{\tau}{2}\left[\ln(y-1) - \ln(y+1)\right] = \frac{\tau}{2} \ln \frac{y-1}{y+1} \tag{47}$$

$$|y| < 1: \quad -\tau \int \frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{\tau}{2} \int dy \left[\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right] \tag{48}$$

$$= \frac{\tau}{2}\left[-\ln(1-y) + \ln(1+y)\right] = \frac{\tau}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = \tau \operatorname{artanh} y \tag{49}$$

$$y < -1: \quad \tau \int \frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{\tau}{2} \int dy \left[-\frac{1}{1-y} + \frac{1}{-1-y}\right] \tag{50}$$

$$= \frac{\tau}{2}\left[\ln(1-y) - \ln(-1-y)\right] = \frac{\tau}{2} \ln \frac{y-1}{y+1} \tag{51}$$

Insgesamt erhalten wir

$$|y| > 1: \quad t = \frac{\tau}{2}\left[\ln \frac{y_1 - 1}{y_1 + 1} - \ln \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1}\right] \tag{52}$$

$$|y| < 1: \quad t = \tau(\operatorname{artanh} y_1 - \operatorname{artanh} y_0) \tag{53}$$

Auflösen nach $y_1 = y(t)$:

$$|y| > 1: \quad \exp\left(\frac{2t}{\tau} + \ln \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1}\right) = f(t) = \frac{y(t) - 1}{y(t) + 1} \implies y(t) = \frac{1 + f(t)}{1 - f(t)} \tag{54}$$

$$|y| < 1: \quad y(t) = \tanh\left(\frac{t}{\tau} + \operatorname{artanh} y_0\right) \tag{55}$$

Die Funktion divergiert für $|y| > 1$ und große t wegen des abstoßenden Potentials:

$$\exp\left(\frac{2t}{\tau} + \ln \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1}\right) < 1 \implies t < \frac{\tau}{2} \ln \frac{y_0 + 1}{y_0 - 1} \tag{56}$$

(f)
- $E < 0$: In diesem Fall befindet sich das Teilchen nicht in der Potentialmulde. Der Zustand ist ungebunden, das Teilchen läuft weg.

- $0 < E < E_{max}$: In diesem Fall kann sich das Teilchen in der Potentialmulde befinden, sofern $|x| < |x_{max}|$. Dann ist der Zustand gebunden. Befindet sich das Teilchen anfangs außerhalb der Mulde, so ist der Zustand ungebunden.
- $E_{max} < E$: Das Teilchen ist ungebunden.

Die Kurven im Phasenraum plotten wir für unterschiedliche Energien E. Der Einfachheit halber setzen wir $m = 2$, $a = 1$, $b = 2$ und erhalten $E_{max} = \frac{b^2}{4a} = 1$.

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + ax^4 - bx^2\right)} = \pm\sqrt{E + x^4 - 2x^2} \tag{57}$$