Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik www.tfp.kit.edu

Blatt 11 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

20 Punkte
Besprechung 22.01.2016

Abgabe bis spätestens 27.01.2016

1. Schwerpunktsystem & Vielteilchensystem (1 + 1.5 + 1.5 + 3 + 2 = 9 Punkte)

Wir betrachten ein System von N Teilchen. Im Laborsystem gilt die Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij}^{\mathrm{ww}} + F_i^{\mathrm{ext}}. \tag{1}$$

für jedes Teilchen $i = 1, \ldots, N$. Hier bezeichnet $\boldsymbol{F}_{ij}^{\mathrm{ww}}$ die Wechselwirkung zwischen Teilchen i und j und $\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{ext}}$ eine externe Kraft. Aus dem 3. Newton'schen Axiom folgt $\boldsymbol{F}_{ij}^{\mathrm{ww}} = -\boldsymbol{F}_{ji}^{\mathrm{ww}}$. Wir wollen nun einige allgemeine Eigenschaften dieses System im Schwerpunktsystem (CMS) analysieren. Der Schwerpunkt, welcher als Ursprung des CMS genutzt wird, des Gesamtsystems ist

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \tag{2}$$

(a) Drücken Sie die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ im Laborsystem durch die Ortsvektoren im CMS $\boldsymbol{r}_i'$ und den Vektor $\boldsymbol{R}$ aus. Finden Sie damit die Bewegungsgleichung im CMS.

(b) Zeigen Sie, dass der Gesamtimpuls $\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i$ gegeben ist durch den Schwerpunktsimpuls $\boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{R}}$. Wie groß ist der Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}'$ im CMS?

(c) Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls in einen Schwerpunkts- und einen relativ Anteil zerfällt gemäß

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_S + \boldsymbol{L}_r = M\boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}} + \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \times \dot{\boldsymbol{r}}_i' \tag{3}$$

(d) Zeigen Sie, folgende Relationen:

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \sum_i F_i^{\mathrm{ext}} \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{ext}} \tag{5}$$

Ohne äußere Kraft sind also der Gesamtimpuls und Drehimpuls erhalten.

(e) Zeigen Sie, dass für den Drehimpuls $\boldsymbol{L}_S$ des Schwerpunktes gilt

$$\dot{\boldsymbol{L}}_S = \boldsymbol{R} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{ext}}. \tag{6}$$

Wirkt keine externe Kraft sind also *Schwerpunkts-* und *relativer* Drehimpuls separat erhalten.

2. Zylinderkoordinaten (1 + 2 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Der Zusammenhang zwischen (raumfesten) kartesischen und Zylinderkoordinaten ist wie folgt definiert: $(x, y, z)^\intercal = \rho \hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z$ mit den Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_z. \tag{7}$$

(a) Zeichnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ in der xy-Ebene.

(b) Zeigen Sie, dass die 3 Einheitsvektoren ein Orthonormalsystem bilden, d.h. $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \hat{\boldsymbol{e}}_z \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 1$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0$.

(c) Berechnen Sie $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \times \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \times \hat{\boldsymbol{e}}_z$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \hat{\boldsymbol{e}}_\rho$ und drücken Sie Ihre Ergebnisse in Zylinderkoordinaten aus. Bilden die drei Einheitsvektoren ein Rechtssystem?

(d) Die Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten sind abhängig von der Position auf der Bahnkurve. Zeigen Sie durch Ableiten von Gleichung (7) nach der Zeit, dass

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\rho = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi, \quad \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\phi = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho. \tag{8}$$

Beim Berechnen von Gescwindigkeiten usw. muss man also darauf achten, auch die Ableitung der Einheitsvektoren zu berechnen.

3. Bewegungsgleichung in Zylinderkoordinaten (2 + 1 + 2 = 5 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen in einem Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Das Teilchen erfüllt dann die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}). \tag{9}$$

(a) Schreibe Sie $\boldsymbol{r}(t) = \rho(t)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z(t)\hat{\boldsymbol{e}}_z$ und berechnen Sie $\dot{\boldsymbol{r}}$ und den Drehimpuls $\boldsymbol{L}(t)$. Benutzen Sie dazu Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 1. Für den Drehimpuls soltlen Sie folgendes Ergebnis erhalten:

$$\boldsymbol{L} = m\left[-z\rho\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + (z\dot{\rho} - \dot{z}\rho)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \rho^2\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\right] \tag{10}$$

(b) Drücken Sie die Bewegungsgleichung in Zylinderkoordinaten aus, indem Sie $\ddot{\boldsymbol{r}}$ berechnen. Drücken Sie dazu auch die Kraft in Zylinderkoordinaten aus ($\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F_\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + F_\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + F_z\hat{\boldsymbol{e}}_z$). Da die Einheitsvektoren linear unabhängig sind, zerfällt die Bewegungsgleichung in drei gekoppelte DGL.

(c) Zeigen Sie mittels der in b) hergeleiteten Bewegungsgleichung, dass für eine Zentralkraft

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = F(\sqrt{\rho^2 + z^2})\frac{\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

der Drehimpuls erhalten ist, also $\dot{\boldsymbol{L}} = 0$. *Hinweis:* Verwenden Sie $zF_\rho - \rho F_z = 0$.

Bemerkung: Für eine Zentralkraft lässt sich die Drehimpulserhaltung auch wesentlich einfacher zeigen. Da $\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{F}|\boldsymbol{r}/r$ folgt direkt aus der Bewegungsgleichung, dass $\ddot{\boldsymbol{r}} \parallel \boldsymbol{r}$. Damit ist dann

$$\dot{\boldsymbol{L}} = m\,\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} \propto \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0. \tag{11}$$

Da der Drehimpuls erhalten ist, kann man das Koordinatensystem bei einer Zentralkraft stets so legen, dass $\boldsymbol{L} = L\hat{\boldsymbol{e}}_z$. Aus Gleichung (10) folgt dann, dass $z = \dot{z} = 0$. Die Bewegung findet dann also in der xy-Ebene statt. Mittels $L = m\rho^2\dot{\phi} = const.$ lässt sich die Winkelabhängigkeit in der Radialgleichung (Teil der Bwegegungsgleichung $\sim \hat{\boldsymbol{e}}_\rho$) eliminieren und man hat eine einfache DGL für $\rho(t)$. Dieses Verfahren werden Sie in der Vorlesung anwenden, um das Zweikörperproblem (Kepler) zu lösen.