

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Lösung 0

DR. ANDREAS POENICKE, MSc. KARIM MNASRI

Besprechung: 21.10.2016

Die meisten Aufgaben können ohne längere Rechnung gelöst werden!

1. Differentialrechnung

Berechnet werden sollen verschiedene Ableitungen, dabei empfiehlt es sich immer die Ausdrücke genau anzusehen. Zum einen nach welcher Variable eigentlich differenziert werden soll, zum anderen ob der Ausdruck nicht vereinfacht werden kann.

$$(a) \quad \frac{d}{dx} e^{\ln x} = \frac{d}{dx} x = 1$$

$$(b) \quad \frac{d}{da} \sin(ax^3) = x^3 \cos(ax^3)$$

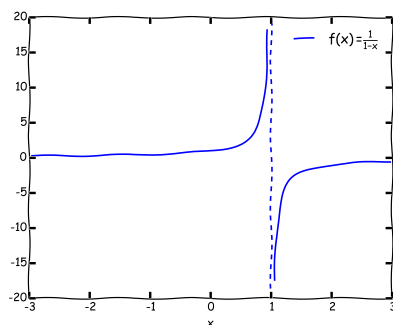
$$(c) \quad \frac{d}{dz} \frac{1}{(x+z^2)} = -\frac{2z}{(x+z^2)^2}$$

$$(d) \quad \frac{d}{d\theta} (\tan \theta \cdot \cos \theta) = \frac{d}{d\theta} \sin(\theta) = \cos(\theta)$$

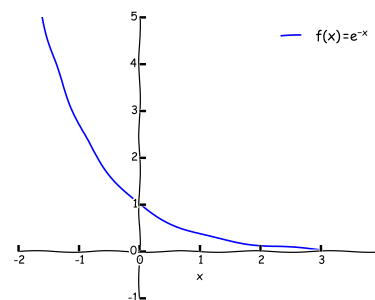
$$(e) \quad \frac{d}{dx} e^{3x^2} = 6xe^{3x^2}$$

2. Kurvendiskussion

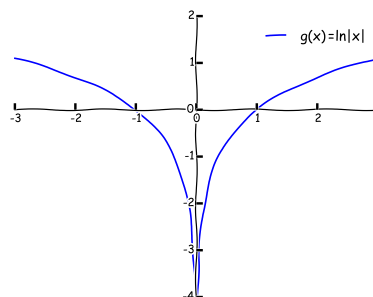
(a) Es sollen folgenden Funktionen skizziert werden:



$$(i) \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$



$$(ii) \quad f(x) = e^{-x}$$



$$(iii) \quad g(x) = \ln |x|$$

Abbildung 1: Skizzen einiger Standardfunktionen

(b) Ist die Funktion $f(x) = x|x|$ an der Stelle $x = 0$

(i) Stetig? Ja. Die Funktion ist abschnittsweise definiert

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

und damit $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$

(ii) Differenzierbar? Ja, linksseitige und rechtsseitige Ableitung stimmen überein:
 $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$

(iii) Zweifach differenzierbar? Nein. Die zweite Ableitung hat bei $x = 0$ einen Sprung:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < 0 \\ 2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

ist also bei $x = 0$ nicht eindeutig definiert.

(c) Finden Sie das Minimum der Funktion

$$u(r) = \frac{1}{2} \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r} \quad \text{mit } a, b > 0$$

Wir suchen die Nullstellen der ersten Ableitungen:

$$u'(r) = -\frac{a}{r^3} + \frac{b}{r^2} = 0$$

Und erhalten $r_{\min} = \frac{a}{b}$ mit $u(r_{\min}) = -\frac{b^2}{2a}$. Es handelt sich um ein Minimum da gilt
 $u''(\frac{a}{b}) = \frac{b^4}{a^3} > 0$ (für $a, b > 0$).

Die Funktion divergiert für $r \rightarrow 0$ mit $\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = +\infty$, und konvergiert für $r \rightarrow \pm\infty$ zu
 $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} u(r) = 0$ wir haben also das absolute Minimum gefunden.

3. Integralrechnung I

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_0^a \frac{dx}{x+a} = \ln(a+a) - \ln a = \ln(2)$

(b) $\int_0^\pi dx \cos x = \sin(\pi) - \sin(0) = 0$

(c) $\int_0^{\ln 2} dx e^x = e^x \Big|_0^{\ln 2} = 2 - 1 = 1$

4. Integralrechnung II

Bestimmen Sie mit Hilfe partieller Integration oder Substitution die folgenden Integrale:

(a) $\int dx \, x \cdot \sin x = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cdot \cos x + \sin x$

(b) $\int dx \, \sin x \cdot \cos x = \sin x \cdot (\sin x) - \int dx \, (\cos x) \cdot (\sin x) = \sin^2 x - \int dx \, \sin x \cos x$
 $\Rightarrow \int dx \, \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin^2 x$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Wir substituieren $x = \sin \theta$ (mit $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), daraus folgt $dx = \cos \theta d\theta$

$$\text{und } \int \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} d\theta = \int d\theta = \theta.$$

Substituieren wir $\theta = \arcsin x$ zurück, erhalten wir $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$

5. Vektorrechnung

(a) Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} = (1, 2, 1)^T$ und $\mathbf{b} = (0, 1, 1)^T$

(i) Welche Längen haben $\mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{b}$?

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{6}, \quad \text{analog } |\mathbf{b}| = \sqrt{2}.$$

(ii) Welchen Wert hat der Winkel α zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$?

Wir nutzen $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$. Damit ist

$$\cos \alpha := \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

(iii) Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear abhängig?

Nein. Wir haben gezeigt, dass zwischen den Vektoren ein Winkel $\alpha \neq 0$ besteht, die beiden Vektoren sind also nicht parallel.

(iv) Wie ist die Basisdarstellung von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in der Basis

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Basisdarstellung in der Standardbasis lässt sich direkt ablesen

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

6. Vektorprodukt (Kreuzprodukt) in $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind zwei beliebige Vektoren $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$. Was erhält man für

(a) $\mathbf{c} \times \mathbf{c} = 0$. Das Kreuzprodukt mit sich selbst ergibt den Nullvektor.

(b) $(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} = 0$

Dies ist auch anschaulich offensichtlich, da der Vektor $(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ senkrecht auf $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ steht.