Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Blatt 1
Abgabe: 25.10.2016

1. Bahnkurven in 2D — 7 Punkte

Wir betrachten einen Massenpunkt in einer Ebene, dessen Bewegung durch die folgenden Gleichungen beschrieben wird:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_x t), \quad y(t) = y_0 \cos(\omega_y t + \phi_y) \tag{1}$$

Die Bahnkurve eines solchen Massepunkts beschreibt eine sogenannte *Lissajous-Figur*, die wir im Folgenden genauer betrachten wollen.

(a) Zunächst soll die Bahnkurve für verschiedene Fälle gezeichnet werden. Dabei ist es hilfreich, zuerst die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ als Funktion von t für mindestens einen Periode (d.h. $0 \le t \le \max(\frac{2\pi}{\omega_x}, \frac{2\pi}{\omega_y})$) zu skizzieren.

[2 Punkte] Skizzieren Sie (von Hand) die Bahnkurve für $x_0 = y_0 = 1$ und
Gleiche Frequenzen, mit

$$\omega_x = \omega_y \quad \text{und} \qquad \text{(i)} \quad \phi_y = \pi/2 \qquad \text{(ii)} \quad \phi_y = \pi/6$$

Kommensurable Frequenzen:

$$\phi_y = \pi/2 \quad \text{und} \qquad \text{(iii)} \quad \omega_x/\omega_y = 1/2 \qquad \text{(iv)} \quad \omega_x/\omega_y = 1/3$$

(b) [2 Punkte] Bestimmen Sie für die Parameter $x_0 = y_0$, $\omega_x = \omega_y$ und $\phi_y = \pi/2$ die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$, die Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$, sowie die Längen $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ und $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$.

(c) [1 Punkte] Zeichnen Sie in den Graphen aus Teilaufgabe 1a)(i), d.h. für die Parameter $\omega_x = \omega_y$ und $\phi_y = \pi/2$, die Vektoren $\mathbf{v}(t')$ und $\mathbf{a}(t')$ zu einer frei gewählten Zeit t' ein.

(d) [2 Punkt] Eine Bahnkurve ist *geschlossen*, wenn ein t existiert, für das Position $\mathbf{r}(t)$ und Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ wieder mit einer Anfangsposition $\mathbf{r}(t_0)$ und -geschwindigkeit $\mathbf{v}(t_0)$ übereinstimmen.

Frequenzen deren Verhältnis eine rational Zahl bilden, d.h $\omega_x/\omega_y = m/n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, werden kommensurabel genannt. Zeigen Sie (für beliebige x_0, y_0 und ϕ_y), dass die Bahnkurve für kommensurable Frequenzen geschlossen ist.

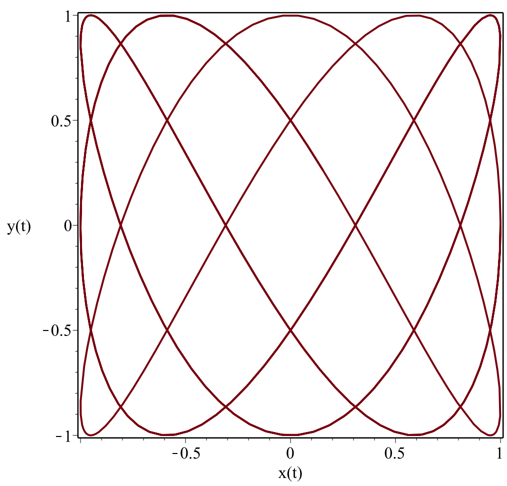

Abbildung 1: Beispiel für eine Lissajous-Figur mit den Parametern $\omega_x/\omega_y = 3/5$ und $\phi_y = \pi/2$.

- Bitte wenden -

2. Bahnkurve in 3D 4 Punkte

Geben ist die Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ ht \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r, \omega, h = const.$$

(a) [2 Punkte] Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$, sowie die Längen $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ und $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$.

(b) [1 Punkt] Skizzieren Sie die Bahnkurve.

(c) [1 Punkt] Gegeben ist der Vektor $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Berechnen Sie $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}$.

3. (Noch mehr) Bahnkurven 3 Punkte

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine (nicht konstante) Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ an, für die gilt, dass

(a) [1 Punkt] $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)\big] = 0$

(b) [1 Punkt] $\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$

(c) [1 Punkt] $\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$

4. Kronecker-Delta und Levi-Civita-Pseudotensor 6 Punkte

Das Kronecker-Delta ist ein Symbol, das sehr oft bei Matrix- oder Vektoroperationen Anwendung findet. Es ist definiert durch:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Mit dem Kronecker-Delta läßt sich zum Beispiel das Skalarprodukt orthonormierter (d.h. orthogonaler und normierter) Vektoren $\mathbf{e}_i$ als

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

schreiben.

Ein weiteres wichtiges Symbol ist der Levi-Civita-Pseudotensor[1] ϵ_{ijk}, auch Permutationssymbol genannt. Es gibt an, ob eine Permutation gerade oder ungerade ist und ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } ijk \text{ gerade Permutation von } (1,2,3), \\ -1 & \text{für } ijk \text{ ungerade Permutation von } (1,2,3), \\ 0 & \text{sonst (z.B. } i = j). \end{cases}$$

Damit kann man zum Beispiel das Kreuzprodukt der Basisvektoren $\mathbf{e}_1$ schreiben als

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k.$$

In der Regel verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention, bei der implizit über identische Indizes summiert wird, und lassen entsprechend das Summenzeichen weg.

(a) [2 Punkte] Es kann gezeigt werden das gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.$$

Überzeugen Sie sich durch Einsetzen einiger Indizes von der Gültigkeit dieser Relation. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Relation, dass weiter gilt $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$.

(c) [1 Punkt] Beweisen Sie die Identität $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

(d) [2 Punkte] Beweisen Sie die “bac-cab”-Formel $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

---

[1] Im folgenden betrachten wir nur den dreidimensionalen Fall. Die Definitionen gelten jedoch analog für n Dimensionen dann mit $\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$.