

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 1

DR. ANDREAS POENICKE, MSc. KARIM MNASRI

Abgabe: 25.10.2016

1. Bahnkurven in 2D

7 Punkte

Wir betrachten einen Massenpunkt in einer Ebene, dessen Bewegung durch die folgenden Gleichungen beschrieben wird:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_x t), \quad y(t) = y_0 \cos(\omega_y t + \phi_y) \quad (1)$$

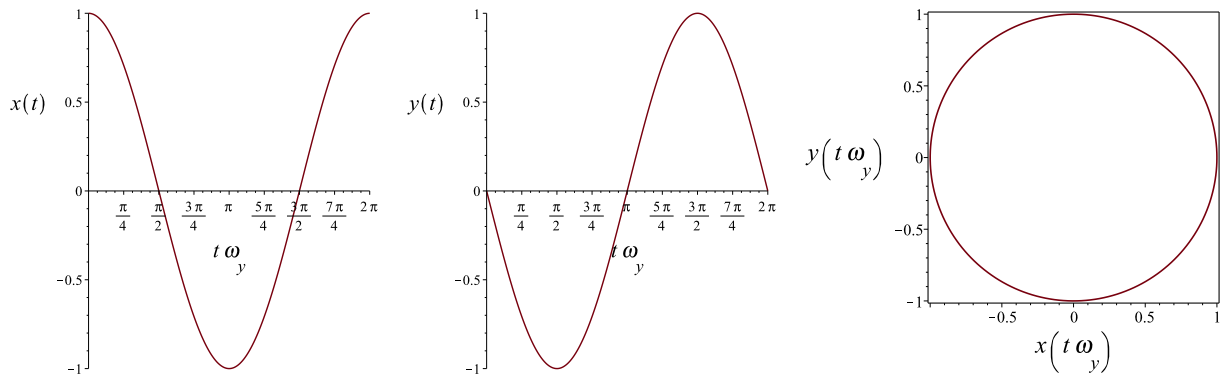
Die Bahnkurve eines solchen Massepunkts beschreibt eine sogenannte *Lissajous-Figur*.

- (a) [2 Punkte] Um die Bahnkurve zu skizzieren ist hilfreich zuerst die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ als Funktion von t für mindestens einen Periode (d.h. $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_{x/y}}$) zu skizzieren.

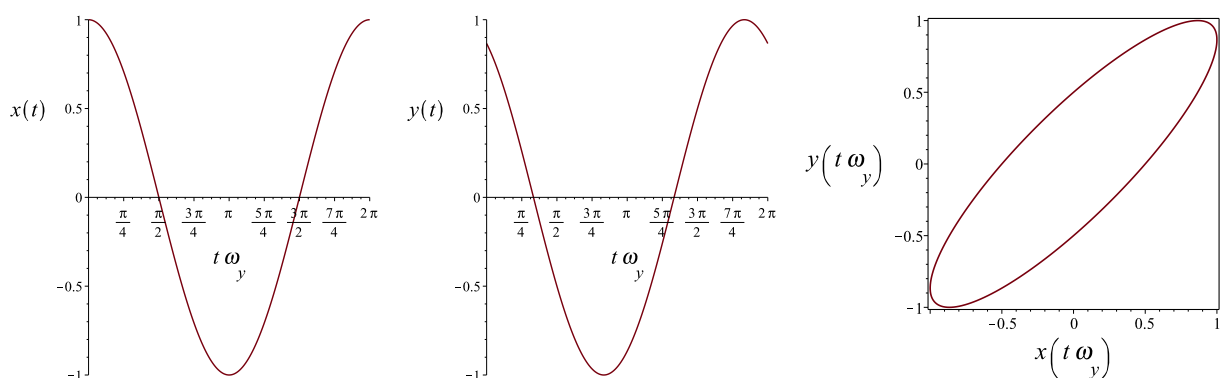
Mit $x_0 = y_0 = 1$ findet man so für:

Gleiche Frequenzen

- (i) $\omega_x = \omega_y$ und $\phi_y = \pi/2$

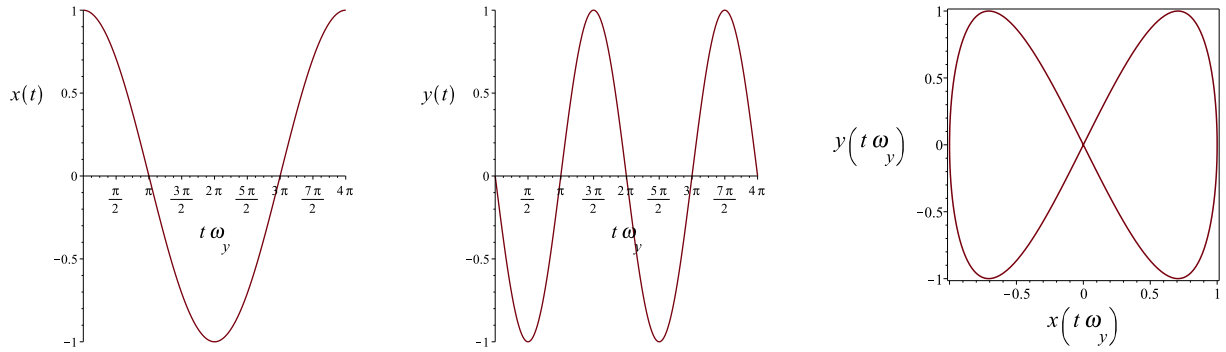


- (ii) $\omega_x = \omega_y$ und $\phi_y = \pi/6$

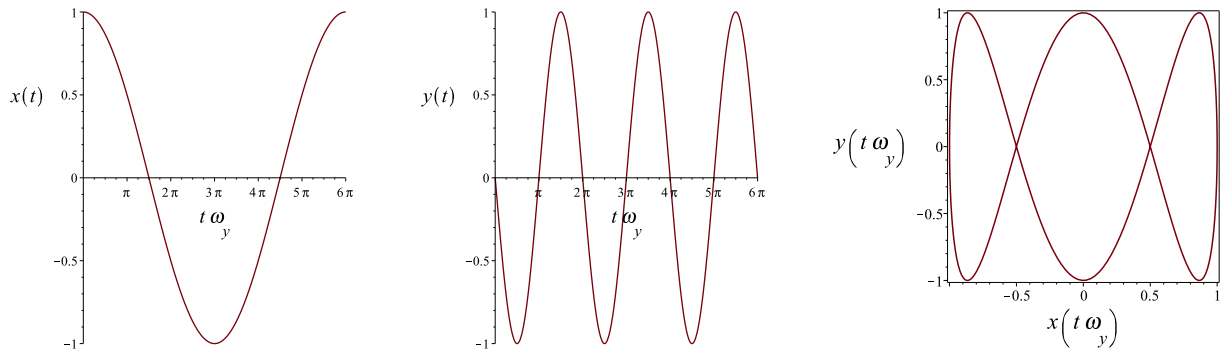


und für die **kommensurable Frequenzen**:

(iii) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$ und $\phi_y = \pi/2$



(iv) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{3}$ und $\phi_y = \pi/2$



- (b) [2 Punkte] Die Geschwindigkeit des Massepunkts bestimmt man über die zeitliche Ableitung der Bahnkurve und erhält für $x_0 = y_0$, $\omega_x = \omega_y$ und $\phi_y = \pi/2$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -x_0\omega_x \sin(\omega_x t) \\ -y_0\omega_x \sin(\omega_y t + \phi_y) \end{pmatrix} = -x_0\omega_x \begin{pmatrix} \sin(\omega_x t) \\ \cos(\omega_x t) \end{pmatrix}.$$

Die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ ist gegeben durch

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} -x_0\omega_x^2 \cos(\omega_x t) \\ -y_0\omega_y^2 \cos(\omega_y t + \phi_y) \end{pmatrix} = -x_0\omega_x^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega_x t) \\ -\sin(\omega_x t) \end{pmatrix}.$$

Die Länge eines Vektors $\mathbf{b}$ ist gegeben durch seinen Betrag (die euklidische Norm¹)

$$b = |\mathbf{b}| = \sqrt{\sum_i b_i^2}.$$

Damit erhält man

$$r(t) = \sqrt{x_0^2 \cos^2(\omega_x t) + y_0^2 \cos^2(\omega_y t + \phi_y)} = \sqrt{x_0^2 [\cos^2(\omega_x t) + \sin^2(\omega_x t)]} = |x_0|.$$

Die Bahnkurve ist eine Kreisbahn mit konstantem Abstand $r = |x_0|$ vom Ursprung.

$$v(t) = \sqrt{x_0^2 \omega_x^2 \sin^2(\omega_x t) + y_0^2 \omega_y^2 \sin^2(\omega_y t + \phi_y)} = \sqrt{x_0^2 \omega_x^2 [\sin^2(\omega_x t) + \cos^2(\omega_x t)]} = |x_0 \omega_x|,$$

Der Massepunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = r|\omega_x|$. Und auch der Betrag der Beschleunigung,

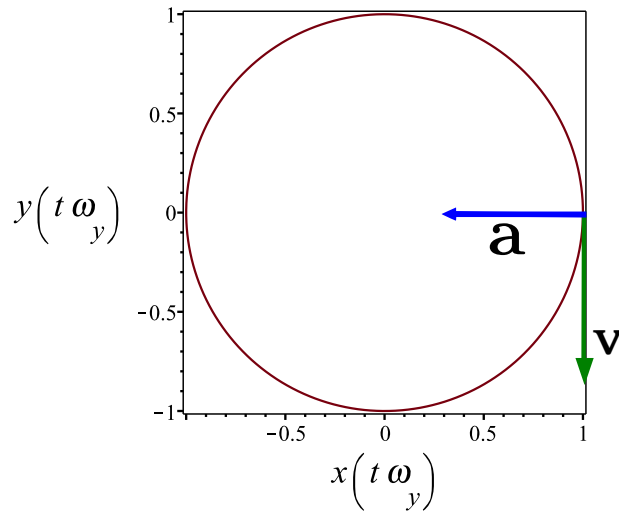
$$a(t) = \sqrt{x_0^2 \omega_x^4 \cos^2(\omega_x t) + y_0^2 \omega_y^4 \cos^2(\omega_y t + \phi_y)} = \sqrt{x_0^2 \omega_x^2 [\cos^2(\omega_x t) + \sin^2(\omega_x t)]} = |x_0 \omega_x^2|,$$

ist zeitlich konstant.

¹auch als Standardnorm, oder 2-Norm bezeichnet.

(c) [1 Punkte] Z.B. zum Zeitpunkt $t' = 0$ sind

$$\mathbf{r}(0) = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(0) = -|x_0 \omega_x| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}(0) = -|x_0| \omega_x^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Die Richtung der Geschwindigkeit ist tangential zur Bahnkurve. (Dies muss immer der Fall sein!). Der Impuls zeigt in Richtung des Kreismittelpunkts.

- (d) [2 Punkte] Eine Bahnkurve ist *geschlossen*, wenn ein t existiert, für das Position $\mathbf{r}(t)$ und Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ wieder mit einer Anfangsposition $\mathbf{r}(t_0)$ und -geschwindigkeit $\mathbf{v}(t_0)$ übereinstimmen. Aus den Bedingungen für die x-Komponenten $x(t_1) = x(t_0)$ und $v_x(t_1) = v_x(t_0)$ erhält man

$$\left. \begin{aligned} \cos(\omega_x t_1) &= x_0 \cos(\omega_x t_0) \\ -x_0 \omega_x \sin(\omega_x t_1) &= -x_0 \omega_x \sin(\omega_x t_0) \end{aligned} \right\} \quad t_1 = t_0 + m \frac{2\pi}{\omega_x} \quad m \in \mathbb{Z},$$

aus den Bedingungen für die y-Komponenten $y(t_1) = y(t_0)$ und $v_y(t_1) = v_y(t_0)$ analog

$$\left. \begin{aligned} y_0 \cos(\omega_y t_1 + \phi_y) &= y_0 \cos(\omega_y t_0 + \phi_y) \\ y_0 \omega_y \sin(\omega_y t_1 + \phi_y) &= -y_0 \omega_y \sin(\omega_y t_0 + \phi_y) \end{aligned} \right\} \quad t_1 = t_0 + n \frac{2\pi}{\omega_y} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Damit ergibt sich

$$t_1 - t_0 = m \frac{2\pi}{\omega_x} = n \frac{2\pi}{\omega_y} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{m}{n}$$

Für Frequenzen deren Verhältnis eine rational Zahl bilden, d.h. $\omega_x/\omega_y = m/n$ sind die Bahnkurven damit geschlossen.

2. Bahnkurve in 3D

4 Punkte

Geben ist die Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \\ ht \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r, \omega, h = \text{const.} \quad (2)$$

- (a) [2 Punkte] In drei Dimensionen berechnen sich Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ wieder durch die Ableitungen der Bahnkurve nach der Zeit

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \\ h \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Für die entsprechenden Längen erhält man damit

$$r(t) = \sqrt{r^2 + h^2 t^2}, \quad v(t) = \sqrt{r^2 \omega^2 + h^2} \quad \text{und} \quad a(t) = |r| \omega^2. \quad (4)$$

- (b) [1 Punkt] Die Bahnkurve ist eine Schraubenlinie

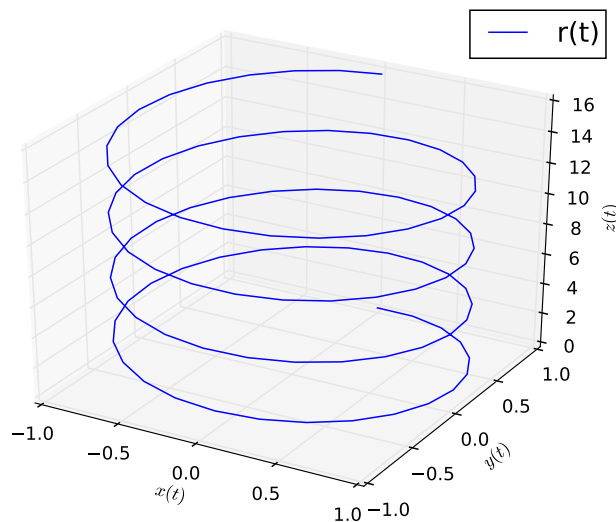


Abbildung 1: Bahnkurve

- (c) [1 Punkt] Das Kreuzprodukt von den Vektoren Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ergibt sich zu

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B} = r\omega B \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nebenbemerkung: Die Lorentzkraft auf ein Elektron in einem statischen Magnetfeld ist gegeben durch $\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Bei einem Magnetfeld in z -Richtung $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ beschreibt das Elektron daher gerade die durch (2) beschriebene Bahnkurve. Unsere mathematische Fingerübung hat also durchaus einen physikalischen Hintergrund.

3. (Noch mehr) Bahnkurven

3 Punkte

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine (nicht konstante) Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ an, für die gilt, dass

- (a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{d}{dt}r^2 = 0$ beschreibt eine Bahnkurve mit konstantem Radius, z.B. eine Kreisbewegung

$$\mathbf{r}(t) = R [\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y] .$$

- (b) $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ beschreibt eine Bahnkurve für die die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ (anti-)parallel zu $\mathbf{r}(t)$ steht. Dies ist zum Beispiel der Fall bei einer linearen Bewegung wie

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{e}_x .$$

- (c) Bei $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ ist die Beschleunigung (anti-)parallel zur Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ gerichtet. Dies gilt zum Beispiel für eine lineare Bewegung

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{e}_x .$$

aber auch bei einer Kreisbewegung

$$\mathbf{r}(t) = R[\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y]$$

da hier gilt, dass

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t) .$$

Die Zentripetalbeschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ zeigt zum Mittelpunkt der Kreisbewegung (Ursprung) und hält das Teilchen auf der Kreisbahn. Ganz allgemein gilt $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ für die sogenannten Keplerbahnen eines Massepunkts in einem Zentralkraftpotential, d.h. elliptische Bahnen, Kreisbahnen, Hyperbelbahnen und Parabelbahnen.

4. Kronecker-Delta und Levi-Civita-Pseudotensor

6 Punkte

In der Regel verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention bei der implizit über identische Indizes summiert wird, und lassen entsprechend das Summenzeichen weg. Zum besseren Verständnis werden wir bei der Lösung dieser Aufgabe die Summen weitgehend ausschreiben.

(a) [2 Punkte] Es gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} \equiv \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.$$

Zuerst überzeugen wir uns von der Gültigkeit dieser Relation in dem wir einige Beispiele betrachten:

$$\begin{aligned} \epsilon_{122}\epsilon_{122} + \epsilon_{222}\epsilon_{222} + \epsilon_{322}\epsilon_{322} &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 & \delta_{22}\delta_{22} - \delta_{22}\delta_{22} &= 1 - 1 = 0 \\ \epsilon_{123}\epsilon_{132} + \epsilon_{223}\epsilon_{232} + \epsilon_{323}\epsilon_{332} &= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -1 & \delta_{23}\delta_{32} - \delta_{22}\delta_{33} &= 0 - 1 = -1 \\ \epsilon_{123}\epsilon_{123} + \epsilon_{223}\epsilon_{223} + \epsilon_{323}\epsilon_{323} &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1 & \delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}\delta_{32} &= 1 - 0 = 1 \\ \epsilon_{113}\epsilon_{112} + \epsilon_{213}\epsilon_{212} + \epsilon_{313}\epsilon_{312} &= 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0 & \delta_{11}\delta_{32} - \delta_{11}\delta_{32} &= 0 - 0 = 0 \\ & \dots & & \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Relation, dass weiter gilt $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} &\equiv \sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = \sum_{j=1}^3 \delta_{jj}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{kj} = \left(\delta_{kl} \sum_{j=1}^3 \delta_{jj} \right) - \left(\sum_{j=1}^3 \delta_{jl}\delta_{kj} \right) \\ &= \left(\delta_{kl} \sum_{j=1}^3 1 \right) - \delta_{kl} = \delta_{kl}(3 - 1) = 2\delta_{kl} \end{aligned}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} \equiv \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \sum_{k=1}^3 \sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \sum_{k=1}^3 2\delta_{kk} = \sum_{k=1}^3 2 = 6$$

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \sum_i a_i (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_i = \sum_i a_i \left(\sum_{jk} \epsilon_{jki} b_j c_k \right) \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{jki} a_i b_j c_k = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \end{aligned}$$

(c) [1 Punkt] Beweisen Sie die Identität $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Die Identität folgt durch zyklisches Vertauschen der Indizes des Levi-Civita-Tensors $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \\ \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{jki} b_j c_k a_i = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \\ \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{kij} c_k a_i b_j = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \end{aligned}$$

(d) [2 Punkte] Beweisen Sie die “bac-cab”-Formel $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k = \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} a_j b_l c_m \\ &= \sum_{jklm} \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} a_j b_l c_m = \sum_{jlm} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= \sum_j a_j b_i c_j - a_j b_j c_i = b_i(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_i(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned}$$