Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Blatt 2
Abgabe: Mittwoch 2.11.2016

1. Natürliche Koordinaten: Das begleitende Dreibein — 12 Punkte

Auf Blatt 1 haben Sie die Schraubentrajektorie kennengelernt, die die spiralförmige Bahnkurve einer punktförmigen Masse m beschrieb

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad r, \omega, v_z = \text{const.}$$

Das natürliche Koordinatesystem wird aus dem Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}$, dem Hauptnormaleinheitsvektor $\mathbf{n}$ und aus dem Binormaleneinheitsvektorvektor $\mathbf{b}$ konstruiert. Diese bilden das begleitende Dreibein, welches sich mit dem Massepunkt entlang der Trajektorie bewegt. *Hinweis: Sie können die Ergebnisse aus dem letzten Übungsblatt nutzen.*

(a) [1 Punkt] Berechnen Sie die Bogenlänge von $t' = 0$ zu $t' = t$, die gegeben ist durch

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t'} \right| \mathrm{d}t' \, .$$

(b) [1 Punkte] Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$.

(c) [1 Punkte] Bestimmen Sie nun den Hauptnormaleinheitsvektor $\mathbf{n}(t) = \frac{R}{v}\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}t}$, zunächst ohne den Krümmungsradius R zu bestimmen.

(d) [3 Punkte] Die Beschleunigung lässt sich so mit Hilfe des Tangenteneinheitsvektors und des Hauptnormaleneinheitsvektors berechnen zu

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{t}(t) + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}(t) \, .$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieses Ausdrucks den Krümmungsradius R als Funktion der Kreisfrequenz ω. (*Hinweis: Nutzen Sie dabei, dass gilt* $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}$.)
Skizzieren Sie $R(\omega)$ und interpretieren Sie die Grenzwerte $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$.

(e) [1 Punkte] Berechnen Sie den Binormaleneinheitsvektor $\mathbf{b}(t)$.

(f) Die Torsion τ einer Kurve ist definiert über

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}(s)}{\mathrm{d}s} = -\tau(s)\mathbf{n}(s) \qquad \text{oder} \qquad \tau(s) = \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}(s)}{\mathrm{d}s} \right| .$$

Sie ist ein Maß dafür, wie sich die Bahnkurve aus der Schmiegungsebene, aufgespannt durch $\mathbf{t}$ und $\mathbf{n}$, herausdreht.

- [2 Punkte] Berechnen Sie τ als Funktion der Kreisfrequenz ω und interpretieren Sie die Grenzwerte $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$.
  Hinweis: Nutzen Sie hierfür die Kettenregel.
- [2 Punkte] Berechnen Sie desweiteren die Kreisfrequenz, bei der die Torsion maximal ist und geben Sie dort ihren Wert an.
- [1 Punkt] Skizzieren Sie τ als Funktion von ω.

2. Drehmatrizen 8 Punkte

Die Transformation $\hat{O}_z(\alpha) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist eine Drehmatrix um die z-Achse mit

$$\hat{O}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei α den Drehwinkel bezeichnet.

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\det[\hat{O}_z(\alpha)] = 1$ ist.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie für beliebige α und β, dass $\hat{O}_z(\alpha)\hat{O}_z(\beta) = \hat{O}_z(\alpha+\beta)$ gilt.

(c) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\hat{O}_z^T(\alpha)\hat{O}_z(\alpha) = \mathbb{1}$. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

(d) [2 Punkte] Berechnen Sie, für einen beliebigen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}' = \hat{O}_z(\alpha)\mathbf{v}$ und zeigen Sie, dass $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$ gilt.

(e) [2 Punkte] Es sei nun $\mathbf{v} = (1,1,0)^T$. Berechnen Sie $\mathbf{v}' = \hat{O}_z\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{v}$.
Bestimmen Sie weiter den Drehwinkel β der folgenden Drehmatrix

$$\hat{O}_z(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) [1 Punkt] Berechnen Sie $\mathbf{v}' = \hat{O}_z\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathbf{v}$, wieder mit $\mathbf{v} = (1,1,0)^T$.

Hinweis: Die Transformation eines Vektors in ein um den Winkel $-\alpha$ gedrehtes Koordinatensystem entspricht gerade einer Drehung des Vektors um den Winkel α in einem festen Koordinatensystem.

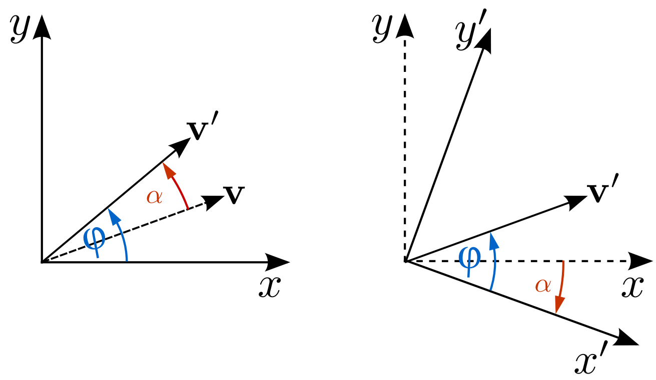

Abbildung 1: (Rechts) Drehung eines Koordinatensystems $(x,y) \xrightarrow{-\alpha} (x',y')$ um den Winkel $-\alpha$. (Links) Drehung eines Vektors $\mathbf{v}$ um den Winkel α in einem festen Koordinatensystem (x,y) ergibt ein äquivalentes Resultat wie auf dem rechten Bild.