Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Blatt 3
Abgabe: 08.11.2016

1. Ableitungen von Vektoren — 4 Punkte

Gegeben sind zwei zeitabhängige Vektoren $\mathbf{a}(t) = \big(a_1(t), a_2(t), a_3(t)\big)^T$ und $\mathbf{b}(t) = \big(b_1(t), b_2(t), b_3(t)\big)^T$.

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie mit Hilfe der Komponentendarstellung der Vektoren, dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)\big] = \dot{\mathbf{a}}(t)\cdot\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\cdot\dot{\mathbf{b}}(t) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t)\big] = \dot{\mathbf{a}}(t)\times\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\times\dot{\mathbf{b}}(t)$$

(b) [2 Punkte] Nutzen Sie diese Produktregel um zu zeigen, dass weiter gilt

$$\text{(i)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)] = 2\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{x}}(t) \qquad \text{(ii)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{x}(t)\times\dot{\mathbf{x}}(t)] = \mathbf{x}(t)\times\ddot{\mathbf{x}}(t)$$

$$\text{(iii)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{x}(t)| = \frac{\mathbf{x}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \qquad \text{(iv)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} = -\frac{\mathbf{x}(t)\times[\mathbf{x}(t)\times\dot{\mathbf{x}}(t)]}{|\mathbf{x}(t)|^3}$$

(c) [1 Punkt] Zeigen Sie damit: Für jeden Vektor $\mathbf{x}(t)$ konstanter Länge steht die Ableitung nach der Zeit orthogonal zu $\mathbf{x}(t)$, d.h.: $|\mathbf{x}(t)| = c,\ c = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}(t) \perp \mathbf{x}(t)$

2. Zylinderkoordinaten — 4 Punkte

Vektoren in $\mathbb{R}^3$ können neben der gewohnten Darstellung in kartesischen Koordinaten $\mathbf{c} = c_x\mathbf{e}_x + c_y\mathbf{e}_y + c_z\mathbf{e}_z$ auch in anderen Koordinatensystemen dargestellt werden. Ein Beispiel für ein krummliniges Koordinatensystem sind die Zylinderkoordinaten. Die Einheitsvektoren sind hierbei gegeben durch

$$\mathbf{e}_\rho(\phi) = \cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y, \qquad \mathbf{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

und Vektoren werden dargestellt durch $\mathbf{c} = c_\rho(\phi)\mathbf{e}_\rho(\phi) + c_\phi(\phi)\mathbf{e}_\phi(\phi) + c_z\mathbf{e}_z$. Durch die Abhängigkeit der Einheitsvektoren von der Koordinate ϕ ist das Koordinatensystem ortsabhängig!

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z$ eine Orthonormalbasis bilden. Zeigen sie weiter, dass die Vektoren ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden.

(b) [1 Punkt] Gegeben sei der Punkt P mit den Koordinaten $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Geben Sie seine Koordinaten in den Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z an. Wie lauten an diesem Punkt die Basisvektoren $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z$ dargestellt durch die kartesischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$?

(c) [1 Punkt] Wie lautet die Darstellung des Ortsvektors $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ des Punkts P aus Teilaufgabe b) in Zylinderkoordinaten? Wie lautet die Darstellung des Vektors $\mathbf{d} = (1, 2, 3)^T$ am Ort $\mathbf{r}$ in Zylinderkoordinaten?

(d) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit eines Massepunkts $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ in Zylinderkoordinaten dargestellt werden kann als:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\phi}\rho\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

Hinweis: Beachten Sie, dass die Einheitsvektoren implizit zeitabhängig sind.

- Bitte wenden -

3. Bahnkurve in Zylinderkoordinaten 4 Punkte

Wir betrachten die Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad r, \omega, v_z = \text{const.}$$

(a) [2 Punkte] Geben Sie die Darstellung dieser Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ in Zylinderkoordinaten.

(b) [1 Punkt] Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ in dieser Darstellung.

(c) [1 Punkt] Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ und den Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(t)$ in der Zylinderkoordinatendarstellung.

4. Kugelkoordinaten 4 Punkte

Kugelkoordinaten sind ein weiteres krummliniges Koordinatensystem. Die Einheitsvektoren sind hierbei gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r(\theta,\phi) &= \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z \\
\mathbf{e}_\theta(\theta,\phi) &= \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y - \sin\theta\,\mathbf{e}_z \\
\mathbf{e}_\phi(\phi) &= -\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y
\end{aligned}$$

und Vektoren werden dargestellt durch $\mathbf{c} = c_r(\theta,\phi)\mathbf{e}_r(\theta,\phi) + c_\theta(\theta,\phi)\mathbf{e}_\theta(\theta,\phi) + c_\phi(\phi)\mathbf{e}_\phi(\phi)$. Durch die Abhängigkeit der Einheitsvektoren von den Koordinaten θ und ϕ ist das Koordinatensystem wieder ortsabhängig!

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ eine Orthonormalbasis bilden. Zeigen sie weiter, dass die Vektoren ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden.

(b) [1 Punkt] Gegeben sei der Punkt P mit den Koordinaten $(x, y, z) = (1, 1, \sqrt{2})$. Geben Sie seine Koordinaten in den Kugelkoordinaten r, θ, ϕ an. Wie lauten an diesem Punkt die Basisvektoren $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ dargestellt durch die kartesischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$?

(c) [1 Punkt] Wie lautet die Darstellung des Ortsvektors $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ des Punkts P aus Teilaufgabe b) in Kugelkoordinaten? Wie lautet die Darstellung des Vektors $\mathbf{d} = (1, 2, 2\sqrt{2})^T$ am Ort $\mathbf{r}$ in Kugelkoordinaten?

(d) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit eines Massepunkts $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ in Kugelkoordinaten dargestellt werden kann als

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{\theta}\,r\,\mathbf{e}_\theta + \dot{\phi}\,r\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi$$

Hinweis: Beachten Sie, dass die Einheitsvektoren wieder implizit zeitabhängig sind

5. Vektorfelder 4 Punkte

Eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor zuordnet, wird Vektorfeld bezeichnet. Besonders bei dem Umgang mit den Feldvektoren, also ortsabhängigen Vektoren, empfiehlt es sich die Symmetrie des Problems zu betrachten und ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen.

(a) [2 Punkte] Stellen Sie den Feldvektor $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, der in kartesischen Koordinaten gegeben ist durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

in Zylinderkoordinaten dar.

(b) [2 Punkte] Stellen Sie den Feldvektor $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, der in kartesischen Koordinaten gegeben ist durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

in Kugelkoordinaten dar.