

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 3

DR. ANDREAS POENICKE, MSC. KARIM MNASRI

Abgabe: 08.11.2016**1. Ableitungen von Vektoren**

4 Punkte

Gegeben sind zwei zeitabhängige Vektoren $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))^T$ und $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))^T$.

(a) [1 Punkt] Mit der Komponentendarstellung der Vektoren soll gezeigt werden, dass gilt

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] = \dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \dot{\mathbf{b}}(t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)] = \dot{\mathbf{a}}(t) \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \dot{\mathbf{b}}(t)$$

Wir nutzen die Darstellung

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t) = a_i(t)b_i(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t) = \epsilon_{ijk}a_i(t)b_j(t)\mathbf{e}_k$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] &= \frac{d}{dt}[a_i(t)b_i(t)] = [\dot{a}_i(t)b_i(t) + a_i(t)\dot{b}_i(t)] = \dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \dot{\mathbf{b}}(t) \\ \frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)] &= \frac{d}{dt}[a_i(t)b_j(t)\epsilon_{ijk}\mathbf{e}_k] = [\dot{a}_i(t)b_j(t) + a_i(t)\dot{b}_j(t)]\epsilon_{ijk}\mathbf{e}_k \\ &= \dot{\mathbf{a}}(t) \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \dot{\mathbf{b}}(t) \end{aligned}$$

(b) [2 Punkte] Die Produktregel soll genutzt werden um zu zeigen, dass weiter gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{d}{dt}[\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)] &= 2\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) & \text{(ii)} \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)] &= \mathbf{x}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \text{(iii)} \quad \frac{d}{dt}|\mathbf{x}(t)| &= \frac{\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} & \text{(iv)} \quad \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} &= -\frac{\mathbf{x}(t) \times [\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)]}{|\mathbf{x}(t)|^3} \end{aligned}$$

Die ersten beiden Relationen lassen sich direkt durch Anwenden der Produktregel zeigen

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{d}{dt}[\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)] &= \ddot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) = 2\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \text{(ii)} \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)] &= \underbrace{\dot{\mathbf{x}}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)}_{=0} + \mathbf{x}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) \end{aligned}$$

Für die letzten beiden Relationen muss man noch die Kettenregel bzw. "bac-cab"-Formel verwenden

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \frac{d}{dt}|\mathbf{x}(t)| &= \frac{d}{dt}[\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)]^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{[\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)]^{1/2}} 2\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \\ \text{(iv)} \quad \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} &= \dot{\mathbf{x}}(t) \frac{1}{|\mathbf{x}(t)|} + \mathbf{x}(t) \cdot \frac{d}{dt} \frac{1}{|\mathbf{x}(t)|} = \dot{\mathbf{x}}(t) \frac{1}{|\mathbf{x}(t)|} + \mathbf{x}(t) \cdot \frac{-1}{|\mathbf{x}(t)|^2} \frac{d}{dt}|\mathbf{x}(t)| \\ &= \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} - \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot [\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)]}{|\mathbf{x}(t)|^3} - \frac{\mathbf{x}(t) \cdot [\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)]}{|\mathbf{x}(t)|^3} \\ &\stackrel{\text{bac-cab}}{=} -\frac{\mathbf{x} \times [\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)]}{|\mathbf{x}(t)|^3} \end{aligned}$$

(c) [1 Punkt] Damit lässt sich direkt zeigen: Für jeden Vektor $\mathbf{x}(t)$ konstanter Länge steht die Ableitung nach der Zeit orthogonal zu $\mathbf{x}(t)$, d.h.: $|\mathbf{x}(t)| = c, c = \text{const.} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) \perp \mathbf{x}(t)$

$$|\mathbf{x}(t)| = c \Rightarrow \frac{d}{dt}|\mathbf{x}(t)| = 0 = \frac{\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) \perp \mathbf{x}(t)$$

2. Zylinderkoordinaten

4 Punkte

Die Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten sind gegeben durch

$$\mathbf{e}_\rho(\phi) = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\phi(\phi) = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z.$$

Durch die Abhängigkeit der Einheitsvektoren von der Koordinate ϕ ist das Koordinatensystem ortsabhängig!

- (a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z$ eine Orthonormalbasis bilden.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\phi &= \cos \phi (-\sin \phi) + \sin \phi \cos \phi = 0 & \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_z &= 0 & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_z &= 0 \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho &= \cos^2 \phi \mathbf{e}_x^2 + \sin^2 \phi \mathbf{e}_y^2 = 1 & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi &= \sin^2 \phi \mathbf{e}_x^2 + \cos^2 \phi \mathbf{e}_y^2 = 1 & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z &= 1 \end{aligned}$$

Zeigen sie weiter, dass die Vektoren ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden.

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi = (\sin \phi \mathbf{e}_y) \times (-\sin \phi \mathbf{e}_x) + (\cos \phi \mathbf{e}_x) \times (\cos \phi \mathbf{e}_y) = \sin^2 \phi \mathbf{e}_z + \cos^2 \phi \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

Alternativ

$$\mathbf{e}_\rho \cdot (\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z) = (\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y) \cdot (\sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \phi \mathbf{e}_x) = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = +1$$

- (b) [1 Punkt] Die Koordinaten des Punkts P mit den Koordinaten $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ soll in den Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z angegeben werden und Darstellung der Basisvektoren $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z$ an diesem Punkt gefunden werden.

Lösung:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \quad \phi = \arccos\left(\frac{x}{\rho}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \quad z = z = 1$$

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{e}_x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{e}_x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

- (c) [1 Punkt] Wie lautet die Darstellung des Ortsvektors $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ des Punkts P aus Teilaufgabe b) in Zylinderkoordinaten?

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z = \sqrt{2} \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z$$

Wie lautet die Darstellung des Vektors $\mathbf{d} = (1, 2, 3)^T$ am Ort $\mathbf{r}$ in Zylinderkoordinaten?

$$\begin{pmatrix} d_\rho \\ d_\phi \\ d_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \frac{3}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_\phi + 3 \mathbf{e}_z$$

- (d) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit eines Massepunkts $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ in Zylinderkoordinaten dargestellt werden kann als:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\phi} \rho \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

Möglichkeit 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) &= \frac{d}{dt} (\rho \cos \phi \mathbf{e}_x + \rho \sin \phi \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) \\ &= \dot{\rho} \cos \phi \mathbf{e}_x + \rho \dot{\phi} (-\sin \phi) \mathbf{e}_x + \dot{\rho} \sin \phi \mathbf{e}_y + \rho \dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z \\ &= \dot{\rho} \underbrace{(\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y)}_{\mathbf{e}_\rho} + \rho \dot{\phi} \underbrace{(-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y)}_{\mathbf{e}_\phi} + \dot{z} \mathbf{e}_z = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Möglichkeit 2:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) \\ &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y) + \dot{z} \mathbf{e}_z = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

3. Bahnkurve in Zylinderkoordinaten

4 Punkte

Wir betrachten die Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r, \omega, v_z = \text{const.}$$

- (a) [2 Punkte] Geben Sie die Darstellung dieser Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ in Zylinderkoordinaten.

$$\begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\phi) \\ \rho \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \rho = r, \quad \phi = \omega t + n2\pi, \quad z = v_z t$$

$$\mathbf{r}(t) = r \mathbf{e}_\rho + v_z t \mathbf{e}_z$$

- (b) [1 Punkt] Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ in dieser Darstellung.

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\phi} \rho \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z = \omega r \mathbf{e}_\phi + v_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a}(t) = (\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2 \rho) \mathbf{e}_\rho + (\ddot{\phi} \rho + 2\dot{\phi}\dot{\rho}) \mathbf{e}_\phi + \ddot{z} \mathbf{e}_z = -\omega^2 r \mathbf{e}_\rho$$

- (c) [1 Punkt] Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ und den Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(t)$ in der Zylinderkoordinatendarstellung.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &= \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\omega r \mathbf{e}_\phi + v_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{\omega^2 r^2 + v_z^2}} \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{t}}{dt} &= \frac{\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + v_z^2}} \dot{\mathbf{e}}_\phi = \frac{-\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + v_z^2}} \dot{\phi} \mathbf{e}_\rho = \frac{-\omega^2 r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + v_z^2}} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{n}(t) &= \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|} = -\mathbf{e}_\rho \end{aligned}$$

4. Kugelkoordinaten

4 Punkte

Kugelkoordinaten sind ein weiteres krummliniges Koordinatensystem. Die Einheitsvektoren sind hierbei gegeben durch

$$\mathbf{e}_r(\theta, \phi) = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\phi(\phi) = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y$$

- (a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ eine Orthonormalbasis bilden.

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi - \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\phi = -\sin \theta \cos \phi \sin \phi + \sin \theta \sin \phi \cos \phi = 0$$

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi = -\cos \theta \cos \phi \sin \phi + \cos \theta \sin \phi \cos \phi = 0$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

Zeigen sie weiter, dass die Vektoren ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta &= \sin \theta \cos \phi \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_z - \sin \theta \sin \phi \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_z \\ &\quad - \sin \theta \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_x - \cos \theta \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_x \\ &\quad - \sin \theta \cos \phi (-\sin \theta) \mathbf{e}_y + \cos \theta \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_y \\ &= -\mathbf{e}_x (\sin^2 \theta \sin \phi + \cos^2 \theta \sin \phi) + \mathbf{e}_y (\sin^2 \theta \cos \phi + \cos^2 \theta \cos \phi) \\ &= -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

oder kürzer

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi &= \cos \theta \cos \phi \cos \phi \mathbf{e}_z + \cos \theta \sin \phi \sin \phi \mathbf{e}_z + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x \\ &= \cos \theta \mathbf{e}_z + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

- (b) [1 Punkt] Gegeben sei der Punkt P mit den Koordinaten $(x, y, z) = (1, 1, \sqrt{2})$. Geben Sie seine Koordinaten in den Kugelkoordinaten r, θ, ϕ an.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2 \quad (x > 0) \rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Wie lauten an diesem Punkt die Basisvektoren $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\phi$ dargestellt durch die kartesischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$?

$$\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_\phi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_z$$

- (c) [1 Punkt] Wie lautet die Darstellung des Ortsvektors $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ des Punkts P aus Teilaufgabe b) in Kugelkoordinaten?

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r = 2 \mathbf{e}_r$$

Wie lautet die Darstellung des Vektors $\mathbf{d} = (1, 2, 2\sqrt{2})^T$ am Ort $\mathbf{r}$ in Kugelkoordinaten?

$$\begin{pmatrix} d_r \\ d_\theta \\ d_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \frac{7}{2}\mathbf{e}_r - \frac{1}{2}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_\phi$$

- (d) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit eines Massepunkts $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ in Kugelkoordinaten dargestellt werden kann als

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r} \mathbf{e}_r + \dot{\theta} r \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} r \sin \theta \mathbf{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} (\cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z) + r \dot{\phi} (-\sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_y) \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + \dot{\theta} r \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} r \sin \theta \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

5. Vektorfelder

4 Punkte

Eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor zuordnet, wird Vektorfeld bezeichnet. Besonders bei dem Umgang mit den Feldvektoren, also ortsabhängigen Vektoren, empfiehlt es sich die Symmetrie des Problems zu betrachten und ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen.

- (a) [2 Punkte] Stellen Sie den Feldvektor $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, der in kartesischen Koordinaten gegeben ist durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

in Zylinderkoordinaten dar. mit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned} F_r(\mathbf{r}) &= F_x(\mathbf{r}) \cos \phi + F_y(\mathbf{r}) \sin \phi = \frac{\alpha}{\rho} (-\sin \phi \cos \phi) + \frac{\alpha}{\rho} (\sin \phi \cos \phi) = 0, \\ F_\phi &= -\sin \phi F_x + \cos \phi F_y = \frac{\alpha}{\rho} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \frac{\alpha}{\rho} \quad \text{und} \quad F_z = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{\rho} \mathbf{e}_\phi$$

- (b) [2 Punkte] Stellen Sie den Feldvektor $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, der in kartesischen Koordinaten gegeben ist durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

in Kugelkoordinaten dar.

Mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\begin{aligned} F_r(\mathbf{r}) &= \cos \phi \sin \theta F_x(\mathbf{r}) + \sin \phi \sin \theta F_y(\mathbf{r}) + \cos \theta F_z(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\alpha}{r^2} (\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -\frac{\alpha}{r^2} \\ F_\phi(\mathbf{r}) &= \cos \phi \cos \theta F_x(\mathbf{r}) + \sin \phi \cos \theta F_y(\mathbf{r}) - \sin \theta F_z(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\alpha}{r^2} (-\sin \phi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \phi \sin \theta) = 0 \\ F_\theta(\mathbf{r}) &= -\sin \phi F_x(\mathbf{r}) + \cos \phi F_y(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^2} \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi - 1) = 0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Feldvektoren in Kugelkoordinaten

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Dieses Ergebnis hätte man auch direkt ablesen können, setzt man den Ortsvektor in Kugelkoordinaten $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ in die Ausgangsgleichung ein.