Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL
DR. ANDREAS POENICKE, MSC. KARIM MNASRI

Blatt 4
Abgabe: 15.11.2016

1. Hyperbelfunktionen 5 Punkte

Die Hyperbelfunktionen Sinus Hyperbolicus (sinh) und Kosinus Hyperbolicus (cosh) sind in der folgenden Weise definiert:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definitionen folgende Identitäten:

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x)$
- Zeigen Sie weiter, dass sich die Umkehrfunktion Areasinus Hyperbolicus (Arsinh) wie folgt berechnen lässt:

$$\mathrm{Arsinh}(y) := \ln(y + \sqrt{y^2+1}),$$

d.h., falls $y = \sinh(x)$, dann ist $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

(b) [3 Punkte] Zeigen Sie durch Integration, dass

$$\int \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\,\mathrm{d}x = \frac{ac-b^2}{2a\sqrt{a}}\mathrm{Arsinh}\left(\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}\right) + \frac{ax+b}{2a}\sqrt{ax^2+2bx+c}, \qquad (1)$$

falls $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$.

Hinweis: Führen Sie folgende Schritte um das Integral zu lösen:

- *Finden Sie eine Substitution der Form $y = x - x_0$, so dass*

$$ax^2 + 2bx + c = a(y^2 + y_0^2).$$

Hier sind die Konstanten x_0 und y_0 zu bestimmen.

- *Das resultierende Integral lässt sich mit Hilfe der weiteren Substitution $y = y_0\sinh(\phi)$ auf ein Integral der Form*

$$\int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[t + \cosh(t)\sinh(t)] \qquad (2)$$

bringen. Beweisen Sie Gleichung (2), indem Sie die rechte Seite differenzieren.

- *Durch Einsetzen von $\cosh(x) = \sqrt{1+\sinh^2(x)}$ erhält man die gewünschte Lösung.*

2. Kinematik in Polarkoordinaten 4 Punkte

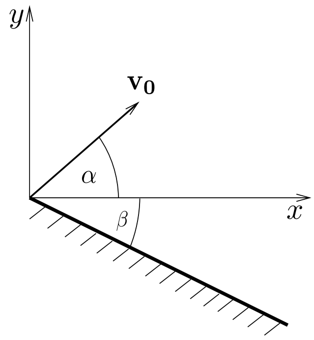
Die Bewegung eines Massepunktes in der Ebene $z = 0$ ist durch die folgende konstanten Geschwindigkeiten, ausgedrückt in Polarkoordinaten, beschrieben: $\dot{\rho}(t) = a$, $\dot{\phi}(t) = b$ mit den Konstanten a und b.

(a) [1 Punkt] Welche Kurvenform beschreibt der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$, wenn der Startpunkt $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t=0)$ durch den Koordinatenursprung gegeben ist? Fertigen Sie desweiteren eine Skizze an.

(b) [3 Punkte] Die von $\mathbf{r}(t)$ in der Zeit $\mathrm{d}t > 0$ überstrichene Fläche ist gegeben durch $\mathrm{d}F = \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t+\mathrm{d}t)|$. Geben Sie die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und die Flächengeschwindigkeit in Polarkoordinaten an.

3. Schräger Wurf 11 Punkte

Betrachten Sie den schrägen Wurf mit der Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ eines Massenpunktes der Masse m unter dem Einfluss einer gleichförmigen Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = -g\,\mathbf{e}_y$ auf einer schiefen Ebene. Die Orientierung dieser schiefen Ebene ist charakterisiert durch den Winkel β relativ zur x-Achse.



(a) [1 Punkt] Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ sowie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ dieser Masse.

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Wurfhöhe $h(\alpha)$, relativ zur schiefen Ebene, gleich

$$h(\alpha) = \frac{{v_0}^2}{2g}\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta}$$

ist.

(c) [2 Punkte] Wie lautet, als Funktion des Abwurfwinkels α, die Wurfweite x_w? Berechnen Sie hierfür die Wurfdauer t_w.

(d) [2 Punkte] Unter welchem Abwurfwinkel α erhält man die größte Wurfweite $x_\mathrm{w,max}$? Zeigen Sie weiter, dass diese dann gegeben ist durch

$$x_\mathrm{w,max} = \frac{v_0^2}{g}\left[\frac{1}{\cos\beta} + \tan\beta\right].$$

Im folgendem sei $\beta = 0$.

(e) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die bis zum Zeitpunkt t_w zurückgelegte Bogenlänge $s_{t_\mathrm{w}} = s(t_\mathrm{w})$ auf der Bahn

$$s_{t_\mathrm{w}} = \frac{{v_0}^2}{g}\left[\cos^2\alpha\ \mathrm{Arsinh}(\tan\alpha) + \sin\alpha\right]$$

lautet.
Hinweis: Verwenden Sie das Integral (1) *aus der Aufgabe 1(b).*

(f) [2 Punkte] Verifizieren Sie anhand des Ausdrucks für s_{t_w}, dass für kleine Winkel $\alpha \approx 0$ die Bogenlänge s_{t_w} annähernd gleich der Wurfweite x_w ist, während für den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gerade der Weg $s_{t_\mathrm{w}} = 2h(\frac{\pi}{2})$ zurückgelegt wird.
Hinweis: Für $\alpha \approx 0$ können Sie näherungsweise $\cos(\alpha) = 1$, $\sin(\alpha) = \alpha$ und $\mathrm{Arsinh}(\alpha) = \alpha$ setzen. Im Grenzfall $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha\ \mathrm{Arsinh}(\tan\alpha) = 0\,.$$