

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Lösung - Blatt 4

DR. ANDREAS POENICKE, MSc. KARIM MNASRI

Abgabe: Dienstag 15.11.2016**1. Hyperbelfunktionen**

5 Punkte

(a) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definitionen folgende Identitäten:

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

- $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$ und $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \cosh(x),$$

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \sinh(x),$$

- Zeigen Sie weiter, dass sich die Umkehrfunktion Areasinus Hyperbolicus (Arsinh) wie folgt berechnen lässt:

$$\operatorname{Arsinh}(y) := \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

d.h., falls $y = \sinh(x)$, dann ist $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

$$\ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \ln \left[\sinh(x) + \sqrt{\sinh^2(x) + 1} \right] = \ln [\sinh(x) + \cosh(x)] = \ln(e^x) = x$$

(b) [3 Punkte] Es soll durch Integration gezeigt werden, dass

$$\int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} \, dx = \frac{ac - b^2}{2a\sqrt{a}} \operatorname{Arsinh} \left(\frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}} \right) + \frac{ax + b}{2a} \sqrt{ax^2 + 2bx + c}, \quad (1)$$

mit $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$.(i) Gesucht wird eine Substitution der Form $y = x - x_0$, so dass

$$ax^2 + 2bx + c = a(y^2 + y_0^2). \quad (2)$$

Dazu setzen wir $y = x - x_0$ in (2) ein

$$ax^2 + 2bx + c = ax^2 - 2axx_0 + ax_0^2 + y_0^2$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleich $x_0 = -b/a$ und $y_0 = \sqrt{ac - b^2}/a$.

(ii) Mit dieser Substitution in (1)

$$\int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} \, dx = \sqrt{a} \int dy \sqrt{y^2 + y_0^2}$$

sind wir noch nicht ganz am Ziel. Jetzt wird erneut substituiert

$$y = y_0 \sinh(\phi), \quad dy = y_0 \cosh(\phi) d\phi$$

und wir erhalten

$$\sqrt{a} \int dy \sqrt{y^2 + y_0^2} = \sqrt{a} \int \sqrt{y_0^2 \sinh^2(\phi) + y_0^2} y_0 \cosh(\phi) d\phi = \sqrt{a} \int y_0^2 \cosh^2 \phi d\phi$$

Dieses Integral ist gegeben durch

$$\int \cosh^2(t) dt = \frac{1}{2} [t + \cosh(t) \sinh(t)]$$

wie sich durch Differenzieren der rechten Seiten zeigen lässt:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} [t + \cosh(t) \sinh(t)] = \frac{1}{2} [1 + \sinh^2(t) + \cosh^2(t)] = \cosh^2(t).$$

(iii) Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx &= \frac{\sqrt{a}}{2} y_0^2 [\phi + \cosh(\phi) \sinh(\phi)] = \frac{\sqrt{a}}{2} y_0^2 \left[\operatorname{Arsinh}\left(\frac{y}{y_0}\right) + \frac{y}{y_0} \sqrt{1 + \frac{y^2}{y_0^2}} \right] \\ &= \frac{ca - b^2}{2a^{3/2}} \operatorname{Arsinh} \frac{ax + b}{\sqrt{ca - b^2}} + \frac{ax + b}{2a} \sqrt{ax^2 + 2bx + c}, \end{aligned}$$

wobei wir zuerst $\phi = \operatorname{Arsinh}(y/y_0)$, und danach $y = x - x_0$ und die Konstanten y_0 und x_0 eingesetzt haben.

2. Kinematik in Polarkoordinaten

4 Punkte

(a) [1 Punkt]

$$\dot{\rho}(t) = a \rightarrow \rho(t) = at + \rho_0$$

und

$$\dot{\phi}(t) = b \rightarrow \phi(t) = bt + \phi_0$$

Somit bekommen wir zusammen mit der Anfangsbedingung $\mathbf{r}(0) = 0$:

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t) \mathbf{e}_\rho = at \mathbf{e}_\rho$$

[ToDo:Skizze: Eine Spirale]

(b) • [1 Punkt]

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\rho}(t) \mathbf{e}_\rho + \rho(t) \dot{\phi}(t) \mathbf{e}_\phi = a \mathbf{e}_\rho + atb \mathbf{e}_\phi$$

• [1 Punkt]

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi = -ab^2t \mathbf{e}_\rho + 2ab \mathbf{e}_\phi$$

• [1 Punkt] Für die Flächengeschwindigkeit gilt

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + dt)| = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times [\mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t) dt]| = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} |\rho \mathbf{e}_\rho \times (\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi)| dt \\ &= \frac{1}{2} |\rho^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_z| dt = \frac{1}{2} \rho^2 |\dot{\phi}| dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 t^2 |b| dt \end{aligned}$$

Es folgt also die Flächengeschwindigkeit $\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} a^2 |b| t^2$.

3. Schräger Wurf

11 Punkte

(a) [1 Punkt] Es handelt sich hierbei um die Grundaufgabe der Kinematik Typ 3, d.h. Die Beschleunigung ist als Funktion des Ortes und als Funktion der Zeit gegeben. Gesucht ist hier die Geschwindigkeit und die Bahnkurve. Aus $\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{e}_y$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= -gt \mathbf{e}_y + \mathbf{v}_0 \\ &= v_0 \cos \alpha \mathbf{e}_x + [-gt + v_0 \sin \alpha] \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Der Ortsvektor folgt durch das Integrieren von der Geschwindigkeit:

$$\mathbf{r}(t) = v_0 t \cos \alpha \mathbf{e}_x + \left[-\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha \right] \mathbf{e}_y$$

- (b) [2 Punkte] Die Wurfhöhe ist $h = y(t_s) + x(t_s) \tan \beta$, wobei t_s die „Steigzeit“ ist. Um diese zu ermitteln müssen wir $\dot{y}(t) + \dot{x}(t) \tan \beta \stackrel{!}{=} 0$ setzen. Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{y} + \dot{x} \tan \beta &= 0 \\ \Rightarrow v_0 \sin \alpha - gt + v_0 \cos \alpha \tan \beta &= 0 \\ \Rightarrow t_s &= \frac{v_0}{g} [\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta]\end{aligned}$$

Diese Zeit wird benötigt um die maximale Höhe zu erreichen. Diese Höhe als Funktion des Wurfwinkels α lautet

$$\begin{aligned}h(\alpha) &= -\frac{1}{2}gt_s^2 + v_0 \sin(\alpha)t_s + v_0 \cos(\alpha)t_s \tan(\beta) \\ &= -\frac{v_0^2}{2g}(\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha)^2 + \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha (\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha) + \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \tan \beta (\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha) \\ &= \frac{v_0^2}{g}(\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha)(\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha) - \frac{v_0^2}{2g}(\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha)^2 \\ &= \frac{v_0^2}{g}(\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha)^2 - \frac{v_0^2}{2g}(\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha)^2 \\ &= \frac{v_0^2}{2g}(\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha)^2 = \frac{v_0^2}{2g} \frac{(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)^2}{\cos^2 \beta} \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta}\end{aligned}$$

- (c) [2 Punkte] Bevor wir den Auftreffpunkt x_w berechnen, muss die Auftreffzeit t_w bekannt sein. Auftreffzeit ist wenn $h = 0$ ist also $y(t_w) + x(t_w) \tan(\beta) = 0$. Diese Gleichung liefert

$$\begin{aligned}0 &= v_0 \sin(\alpha)t_w - \frac{g}{2}t_w^2 + v_0 \cos(\alpha)t_w \tan(\beta) \quad | \cdot t_w^{-1} \text{ da } t_w \neq 0 \\ t_w &= \frac{2v_0}{g}(\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta) = \frac{2v_0}{g} \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \\ &= \frac{2v_0}{g} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}.\end{aligned}$$

Die Wurfweite ist nun

$$x_w(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin(\alpha + \beta)$$

- (d) [2 Punkte] Um daraus die maximale Wurfweite zu gewinnen müssen wir den richtigen Wurfwinkel finden. Dieser lässt sich durch die Nullstelle der Ableitung finden:

$$\begin{aligned}\frac{dx_w(\alpha)}{d\alpha} &\stackrel{!}{=} 0 \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \beta} \left[\underbrace{\cos(\alpha) \cos(\alpha + \beta) - \sin(\alpha) \sin(\alpha + \beta)}_{\cos(\alpha + [\alpha + \beta])} \right] = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\cos(2\alpha + \beta)}{\cos \beta}\end{aligned}$$

Schließlich folgt, dass $\cos(2\alpha + \beta) \stackrel{!}{=} 0$ also

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}.$$

Die maximale Wurfweite ist nun:

$$\begin{aligned}x_{w,\max} &= \frac{2v_0^2}{g} \frac{1}{\cos \beta} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)}_{= \frac{1}{2} [\sin(2\frac{\pi}{4}) + \sin(2\frac{\beta}{2})]} \\ &= \frac{v_0^2}{g} \frac{1}{\cos \beta} [1 + \sin \beta] \\ &= \frac{v_0^2}{g} \left[\frac{1}{\cos \beta} + \tan \beta \right].\end{aligned}$$

(e) [2 Punkte] Die bis zum Zeitpunkt t_w zurückgelegte Bogenlänge ist

$$s_{t_w} = \int_0^{t_w} |\mathbf{v}(t)| dt,$$

mit $t_w = \frac{2v_0}{g} \sin(\alpha)$ für $\beta = 0$ und

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{\dot{y}^2(t) + \dot{x}^2(t)} \\ &= \sqrt{[-gt + v_0 \sin(\alpha)]^2 + v_0^2 \cos^2(\alpha)} \\ &= \sqrt{g^2 t^2 - 2v_0 g \sin(\alpha) t + v_0^2}. \end{aligned}$$

Dies in der Bogenlänge eingesetzt ergibt

$$s_{t_w} = \int_0^{t_w} \sqrt{g^2 t^2 - 2v_0 g \sin(\alpha) t + v_0^2} dt,$$

Dieses Integral hat die selbe Form wie die aus der Aufgabe 1(b) mit den Koeffizienten

$$a = g^2, \quad b = -gv_0 \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad c = v_0^2.$$

Desweiteren gilt $ac - b^2 = g^2 v_0^2 \cos^2(\alpha) > 0$. Somit kann das Integral aus 1(b) angewendet werden und

$$\begin{aligned} s_{t_w} &= \left[\frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{2g} \operatorname{Arsinh} \left[\frac{gt - v_0 \sin(\alpha)}{v_0 \cos(\alpha)} \right] + \frac{gt - v_0 \sin(\alpha)}{2g} \sqrt{g^2 t^2 - 2gv_0 \sin(\alpha) t + v_0^2} \right]_0^{t_w} \\ &= \left\{ \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{2g} \operatorname{Arsinh}(\tan \alpha) + \frac{v_0^2}{2g} \sin(\alpha) \right\} - \left\{ -\frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{2g} \operatorname{Arsinh}(\tan \alpha) - \frac{v_0^2}{2g} \sin(\alpha) \right\} \\ &= \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} \operatorname{Arsinh}(\tan \alpha) + \frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha) \\ &= \frac{v_0^2}{g} [\cos^2(\alpha) \operatorname{Arsinh}(\tan \alpha) + \sin(\alpha)] \end{aligned}$$

(f) [2 Punkte] Für kleine Winkel gilt

$$s_{t_w} \approx \frac{v_0^2}{g} (\alpha + \alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \alpha$$

während

$$x_w \approx \frac{2v_0^2}{g} 1 \cdot \alpha = \frac{2v_0^2}{g} \alpha \quad \checkmark$$

Dagegen für $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$s_{t_w} = \frac{v_0^2}{g} (0 + 1) = \frac{v_0^2}{g}$$

während

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} \quad \checkmark$$