

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Lösung - Blatt 5

DR. ANDREAS POENICKE, MSc. KARIM MNASRI

Abgabe: 22.11.2016**1. Bezugssysteme**

6 Punkte

Ein Massepunkt bewege sich auf der Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = r_{0,x} \mathbf{e}_x + v_z t \mathbf{e}_z$$

Geben Sie die Bahnkurve in den folgenden Bezugssystemen an:

- (a) Um den Vektor $d \mathbf{e}_z$ verschoben, (d.h. der Koordinatenursprung des neuen Bezugssystem liegt im alten System bei $(0, 0, d)$).

$$\mathbf{r}'(t) = r_{0,x} \mathbf{e}_x + (v_z t - d) \mathbf{e}_z$$

- (b) Um den Winkel π um die y -Achse gedreht.

$$\mathbf{r}'(t) = \hat{O}_y(\pi) \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi & 0 & -\sin \pi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \pi & 0 & \cos \pi \end{pmatrix} \left[r_{0,x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_z t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = -r_{0,x} \mathbf{e}'_x - v_z t \mathbf{e}'_z$$

- (c) Um den Winkel $\pi/4$ gegen den Uhrzeigersinn um die z -Achse gedreht.

$$\mathbf{r}'(t) = \hat{O}_z\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[r_{0,x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_z t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = r_{0,x} \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}'_x - \mathbf{e}'_y) + v_z t \mathbf{e}'_z$$

- (d) Gleichförmig mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ bewegt (für $t = 0$ sollen die Koordinaten beider Systeme zusammenfallen).

$$\mathbf{r}'(t) = (r_{0,x} - vt) \mathbf{e}_x + v_z t \mathbf{e}_z$$

- (e) Gleichförmig mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v_z \mathbf{e}_z$ bewegt (für $t = r_{0,x}/v_z$ sollen die Koordinaten beider Systeme zusammenfallen).

$$\mathbf{r}'(t) = r_{0,x} \mathbf{e}_x + v_z t \mathbf{e}_z - \mathbf{r}_0 - v_z t \mathbf{e}_z = r_{0,x} \mathbf{e}_x - \mathbf{r}_0 \quad (1)$$

$$\mathbf{r}'\left(\frac{r_{0,x}}{v_z}\right) = \mathbf{r}\left(\frac{r_{0,x}}{v_z}\right) = r_{0,x} \mathbf{e}_x + r_{0,x} \mathbf{e}_z \rightarrow \mathbf{r}_0 = -r_{0,x} \mathbf{e}_z \quad (2)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) = r_{0,x} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \quad (3)$$

- (f) Mit konstanter Beschleunigung $\mathbf{a} = c(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$ bewegt (für $t=0$ sollen die Koordinaten beider System zusammenfallen und die Relativgeschwindigkeit beider Systeme verschwinden).

$$\mathbf{r}'(t) = r_{0,x} \mathbf{e}_x + v_z t \mathbf{e}_z - c(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)t^2/2 - \mathbf{v}_0 t - \mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}(0) \text{ und } \dot{\mathbf{r}}'(0) = \dot{\mathbf{r}}(0) \Rightarrow \mathbf{r}_0 = 0 \text{ und } \mathbf{v}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \left(r_{0,x} - \frac{ct^2}{2}\right) \mathbf{e}_x + \left(v_z t - \frac{ct^2}{2}\right) \mathbf{e}_z$$

2. Inertialsysteme

6 Punkte

Ein Massepunkt bewege sich im Inertialsystem Σ auf der Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 t^2,$$

wobei $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$ und $\mathbf{a}_0$ beliebige zeitlich konstante Vektoren sind.

(a) [1 Punkt] Finden Sie eine Transformation auf ein Inertialsystem Σ' , so dass in Σ' gilt:

$$\mathbf{r}'(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}'(0) = 0.$$

Die Transformation ist eine Verschiebung um $\mathbf{r}_0$ und eine gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}(t)$$

Die Bahnkurve in Σ' ist damit gegeben durch

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 t^2$$

(b) Bestimmen Sie die Drehmatrix $\hat{O}$, die aus diesem Inertialsystem Σ' in ein Inertialsystem Σ'' transformiert, so dass die Beschleunigung in Σ'' in positive z -Richtung zeigt.

(i) [2 Punkte] Finden Sie zunächst eine Drehung um die z -Achse (Drehwinkel ϕ), so dass der gedrehte Beschleunigungsvektor keine y -Komponente mehr hat und die x -Komponente in positive Richtung zeigt.

Die Drehung um die z -Achse ergibt

$$\hat{O}_z(\phi) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ 0 \\ a'_3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also $a'_3 = a_3$ und aus $-a_1 \sin \phi + a_2 \cos \phi = 0$

$$\tan \phi = \frac{a_2}{a_1}.$$

Damit ist ϕ allerdings nur bis auf einen Term $n\pi$ festgelegt. Wir nutzen nun

$$\cos \phi = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \phi}} \quad \text{und} \quad \sin \phi = \frac{\tan \phi}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \phi}}$$

wobei das Vorzeichen durch ϕ bestimmt wird, oder umgekehrt ϕ (bis auf $2n\pi$) festlegt. Berechnen wir jetzt a'_1

$$\begin{aligned} a'_1 = \cos(\phi) a_1 + \sin(\phi) a_2 &= \frac{a_1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \phi}} + \frac{a_2 \tan \phi}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \frac{a_1^2}{\pm a_1 \sqrt{1 + (\frac{a_2}{a_1})^2}} + \frac{a_2^2}{\pm a_1 \sqrt{1 + (\frac{a_2}{a_1})^2}} \\ &= \pm \text{sign}(a_1) \frac{a_1^2 + a_2^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \pm \text{sign}(a_1) \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \end{aligned}$$

Die Forderung $a'_1 \geq 0$ legt nun fest¹

$$a'_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \cos \phi = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad \text{und} \quad \sin \phi = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

¹Für ϕ würde dies bedeuten $\phi = \begin{cases} \arctan \frac{a_2}{a_1} & \text{für } a_1 > 0 \\ \arctan \frac{a_2}{a_1} + \pi & \text{für } a_1 < 0 \end{cases}$

- (ii) [2 Punkte] Finden Sie danach eine zweite Drehung um die y -Achse (Drehwinkel θ), so dass auch die x -Komponente verschwindet.

Analog drehen wir um die y -Achse:

$$\hat{O}_y(\theta)\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ 0 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a''_3 \end{pmatrix}$$

$$\tan \theta = \frac{a'_1}{a'_3}$$

$$a''_3 = a'_1 \sin \theta + a'_3 \cos \theta = \frac{a'_1 \tan \theta}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta}} + \frac{a'_3}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \pm \text{sign}(a'_3) \sqrt{a_1'^2 + a_3'^2}.$$

Die Forderung $a''_3 \geq 0$ legt nun fest²

$$a''_3 = \sqrt{a_1'^2 + a_3'^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad \text{und} \quad \cos \theta = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

- (c) [1 Punkt] Berechnen Sie die Gesamtdrehmatrix $\hat{O}$ und geben Sie die Bahnkurve in Σ'' an.

Die Drehmatrix mit der wir die Transformation erreicht haben ist damit gegeben durch

$$\hat{O} = \hat{O}_y(\theta)\hat{O}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_3 a_1}{a \tilde{a}} & \frac{a_3 a_2}{a \tilde{a}} & -\frac{\tilde{a}}{a} \\ -\frac{a_2}{\tilde{a}} & \frac{a_1}{\tilde{a}} & 0 \\ \frac{a_1}{a} & \frac{a_2}{a} & \frac{a_3}{a} \end{pmatrix}$$

mit $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ und $\tilde{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Die Bahnkurve in Σ'' ist dann gegeben durch

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{1}{2} \mathbf{a}'' t^2 = \frac{1}{2} a t^2 \mathbf{e}_z$$

²Für θ würde dies bedeuten $\theta = \begin{cases} \arctan \frac{a'_1}{a'_3} & \text{für } a_3 > 0 \\ \arctan \frac{a'_1}{a'_3} + \pi & \text{für } a_3 < 0 \end{cases}$

3. Schräger Wurf aus anderem Blickwinkel

8 Punkte

Betrachten Sie den schrägen Wurf mit der Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ eines Massenpunktes der Masse m unter dem Einfluss einer gleichförmigen Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = -g \mathbf{e}_y$ auf einer schiefen Ebene (Abb.1(a)). Die Orientierung dieser schiefen Ebene ist charakterisiert durch den Winkel β relativ zur x -Achse. Diese Problemstellung könnte Ihnen bekannt vorkommen.

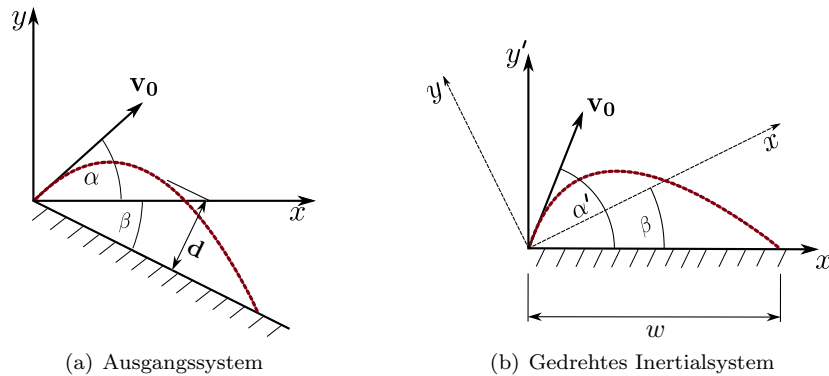


Abbildung 1: Schiefer Wurf auf schräger Ebene betrachtet in zwei Inertialsystemen.

Das Problem soll nun allerdings in einem gedrehten Bezugssystem betrachtet werden, in dem die x' -Achse in Richtung der schiefen Ebene orientiert ist, siehe Abb. 1(b).

- (a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Beschleunigung $\mathbf{a}'(t)$, sowie die Anfangswerte $\mathbf{v}'_0$ und $\mathbf{r}'_0$ in dem gedrehten Inertialsystem. Bestimmen Sie aus der Bewegungsgleichung die Geschwindigkeit $\mathbf{v}'(t)$ sowie die Bahnkurve $\mathbf{r}'(t)$ in diesem System.

Im gedrehten Inertialsystem sind

$$\mathbf{a}' = g \begin{pmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}'_0 = v_0 \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos(\alpha') \\ \sin(\alpha') \end{pmatrix}$$

Damit erhält man durch Integration

$$\dot{\mathbf{r}}' = gt \begin{pmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} \cos(\alpha') \\ \sin(\alpha') \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{r}' = \frac{g}{2} t^2 \begin{pmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{pmatrix} + v_0 t \begin{pmatrix} \cos(\alpha') \\ \sin(\alpha') \end{pmatrix}.$$

Dies kann man auch durch Transformation der Ergebnisse für $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und $\mathbf{r}(t)$ von Blatt 4 erhalten.

- (b) [2 Punkte] Bestimmen Sie den maximalen Abstand d zur schiefen Ebene.

Der maximaler Abstand d entspricht maximalem r'_y im gedrehten System:

$$\dot{r}'_y(t_d) = -gt_d \cos \beta + v_0 \sin(\alpha') = 0 \quad \Rightarrow \quad t_d = \frac{v_0 \sin(\alpha')}{g \cos \beta}$$

damit ist

$$d = r'_y(t_d) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha')}{g \cos \beta} - \frac{g v_0^2 \sin^2(\alpha')}{2 g^2 \cos^2 \beta} \cos \beta = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha')}{2g \cos \beta}.$$

- (c) [2 Punkte] Wie lautet, als Funktion des Abwurfwinkels α' , die Wurfweite w ? Berechnen Sie hierfür die Wurfdauer t_w .

Die Wurfdauer gibt sich durch $r'_y(t_w) = 0$.

$$-\frac{g}{2}t_w^2 \cos \beta + v_0 t_w \sin(\alpha') = 0 \quad \Rightarrow \quad t_w = \frac{2v_0 \sin(\alpha')}{g \cos \beta}.$$

Natürlich ändert sich die Wurfdauer durch das Drehen des Koordinatensystems nicht, mit $\alpha' = \alpha + \beta$ reproduzieren wir das Ergebnis von Blatt 4.

Die Wurfweite w ist damit gegeben durch

$$w(\alpha') = r'_x(t_w) = v_0 \frac{2v_0 \sin(\alpha')}{g \cos \beta} \cos(\alpha') + \frac{g}{2} \frac{4v_0^2 \sin^2(\alpha')}{g^2 \cos^2 \beta} \sin(\beta) \quad (4)$$

$$= \frac{2v_0^2 \sin(\alpha')}{g \cos^2 \beta} [\cos(\alpha') \cos(\beta) + \sin(\alpha') \sin(\beta)] = \frac{2v_0^2 \sin(\alpha')}{g \cos^2 \beta} \cos(\alpha' - \beta) \quad (5)$$

Eine kurze geometrische Betrachtung ergibt Zusammenhang $x_w = w \cos(\beta)$ zwischen der Wurfweite w und x_w von Blatt 4.

- (d) [2 Punkte] Um den Abwurfwinkel α' für die größte Wurfweite $x_{w,\max}$? zu bestimmen sucht man wieder die Nullstellen der Ableitung

$$\frac{dw}{d\alpha'} = \frac{2v_0^2}{g \cos \beta^2} [\cos(\alpha') \cos(\alpha' - \beta) - \sin(\alpha') \sin(\alpha' - \beta)] = \frac{2v_0^2}{g \cos \beta^2} \cos(2\alpha' - \beta) = 0$$

und erhält damit

$$\alpha'_{\max} = \frac{\pi}{4} + \beta/2$$

$$\begin{aligned} w_{\max} &= 2 \frac{v_0^2 \sin(\pi/4 + \beta/2)}{g \cos^2 \beta} \cos(\pi/4 + \beta/2 - \beta) = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \beta} 2 \sin\left(\frac{\pi/2 + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi/2 - \beta}{2}\right) \\ &= \frac{v_0^2}{g \cos^2 \beta} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \beta\right) = \frac{v_0^2}{g} \frac{1 + \sin \beta}{\cos^2 \beta} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Abwurfwinkel α im Ursprungssystem

$$\alpha = \alpha' - \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\max} = \pi/4 - \beta/2.$$