Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Blatt 6
Abgabe: 29.11.2016

1. Bewegung in einem rotierenden Bezugssystem — 7 Punkte

Wir lassen einen Stein der Masse m in einen Brunnen fallen, der am Äquator steht. Auf Grund der Erdrotation folgt die Trajektorie des Steins nicht dem senkrechten Lot in Richtung Erdmittelpunkt. Diese Bewegung wird im rotierenden Bezugssystem der Erde durch

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}'(t)}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_g - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'(t)}{\mathrm{d}t} - m\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'(t)]$$

beschrieben, wobei der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt liegt und die z-Achse durch die Brunnenöffnung verläuft (siehe Abbildung 1). Wir nehmen an, dass die Winkelgeschwindigkeit ω konstant und die Erde eine Kugel mit Radius R ist.

(a) [2 Punkte] Führen Sie die Relativkoordinate $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) - R\mathbf{e}_z$ ein, wobei R die Distanz vom Erdmittelpunkt zur Brunnenöffnung ist. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\mathbf{r}(t)$ im erdfesten Koordinatensystem. Nehmen Sie hierbei vereinfachend an, dass die Erdanziehungskraft $\mathbf{F}_g = -mg_0\mathbf{e}_z$ die der ruhenden Erde und unabhängig von $\mathbf{r}$ ist. Nehmen Sie ferner an, dass die Zentrifugalkraft ebenfalls unabhängig von $\mathbf{r}$ ist, was für nicht zu tiefe Brunnen näherungsweise zutrifft.

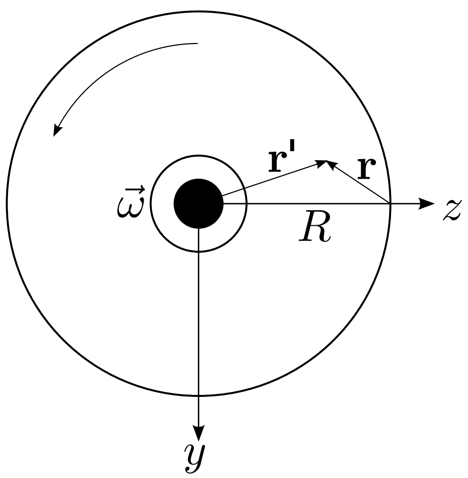


Abbildung 1: Die Erde in Aufsicht. Die Drehachse $\boldsymbol{\omega}$ zeigt zum Nordpol, der über der Papierebene auf der x-Achse liegt. Die Koordinatenachsen y und z liegen in der Äquatorialebene, was für die Vektoren $\mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}$ nicht zutreffen muss.

(b) [1 Punkt] Lösen Sie diese Bewegungsgleichung zunächst unter Vernachlässigung der Corioliskraft und berechnen Sie die Trajektorie $\mathbf{r}_0(t)$ des Steins. Zeigen Sie, dass er einer effektiven Erdbeschleunigung $g_{\text{eff}} = g_0 - \omega^2 R$ unterliegt.

(c) [2 Punkte] Ausgehend von dieser Trajektorie $\mathbf{r}_0(t)$ addieren wir nun die Corioliskraft. Setzen Sie dazu $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{u}(t)$ und zeigen Sie, dass für geeignete Anfangsbedigungen die Differenzialgleichung gilt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}(t)}{\mathrm{d}t} = -2\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{r}_0(t) + \mathbf{u}(t)]\,. \qquad (1)$$

(d) [2 Punkte] Nehmen Sie schließlich an, dass die Abweichung $\mathbf{u}(t)$ vom Lot so klein ist, dass sie auf der rechten Seite von Gl. (1) vernachlässigt werden kann und berechnen Sie für diesen Fall explizit $\mathbf{u}(t)$. Zeigen Sie, dass die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ gegenüber $\mathbf{r}_0(t)$ nach Osten abgelenkt wird.

2. Senkrechter Fall über einer rotierenden Scheibe 5 Punkte

Ein Teilchen fällt senkrecht in einem homogenen Gravitationsfeld auf eine rotierende Scheibe zu. Das Teilchen befinde sich anfangs in Ruhe in der Höhe h und einem radialen Abstand R vom Zentrum der Scheibe. Die Scheibe rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $\boldsymbol{\omega}$ um seine Symmetrieachse (die z-Achse).
Hinweise:

- *Skizzieren Sie die Ausgangslage und das Koordinatensystem.*
- *Lösen Sie diese Aufgabe nur in Zylinderkoordinaten.*

(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen in einem rotierenden Koordinatensystem, welches fest mit der rotierenden Scheibe verbunden ist.

(b) [3 Punkte] Berechnen Sie die Zeit und den Ort des Aufpralls des Teilchens auf der Scheibe.
Hinweise:
- *Bedenken Sie, dass das Teilchen anfangs in Ruhe ist. Jedoch nur in Bezug auf ein nicht rotierendes Koordinatensystem. Daher gilt im rotierenden zylindrischen Koordinatensystem $\dot{\rho}(0) = 0$ und $\dot{\phi}(0) \neq 0$.*
- *Um den Ort des Aufpralls zu bestimmen, genügt es den Abstand ρ zum Ursprung und den Winkel ϕ zum Zeitpunkt des Aufpralls zu berechnen.*

3. Elementarsätze der Vektoralgebra [3 Punkte]

Gegeben seien eine skalare Funktion $\phi(\mathbf{r})$ und eine vektorielle Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, die zweimal stetig partiell differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass gilt

(i) rot grad $\phi(\mathbf{r}) = 0$

(ii) div rot $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = 0$

(iii) div grad $\phi(\mathbf{r}) = \Delta\phi(\mathbf{r})$

(iv) rot rot $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ = grad div $\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \Delta\mathbf{f}(\mathbf{r})$

(v) div $[\phi(\mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{r})] = \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot$ grad $\phi(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r})$ div $\mathbf{f}(\mathbf{r})$

(vi) rot $[\phi(\mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{r})] =$ [grad $\phi(\mathbf{r})] \times \mathbf{f}(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r})$ rot $\mathbf{f}(\mathbf{r})$

wobei der Laplace Operator Δ gegeben ist durch

$$\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\,.$$

Hinweis: Diese Aufgabe lässt sich wesentlich schneller lösen, indem Sie das Kronecker-Delta und den Levi-Civita Pseudotensor nutzen.

4. Wegintegrale und Stoke'scher Satz [5 Punkte]

Das Wegintegral einer stetigen, vektorwertigen Funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entlang eines stetigen Weges ist definiert als

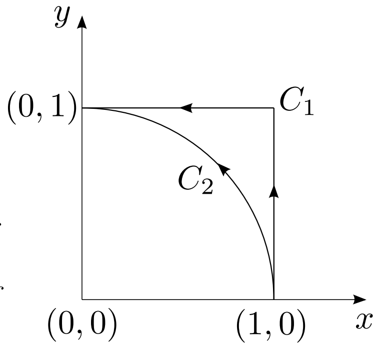
$$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\mathrm{d}t\,,$$

wobei der Vektor $\mathbf{r}(t)$ ($\mathbf{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$) eine bijektive Parametrisierung der Kurve C ist, so dass $\mathbf{r}(a)$ und $\mathbf{r}(b)$ den Anfangs- bzw. den Endpunkt der Kurve C darstellt.

(a) [4 Punkte]

Gegeben sind die beiden Kräfte

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$$



Berechnen Sie, mit Hilfe von geeigneten Parametrisierungen, die beiden Integrale $\int_C \mathbf{F}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, $j = 1, 2$ jeweils entlang der skizzierten Wege C_1 und C_2 von $(1,0)$ nach $(0,1)$.
Hinweis: Für Kreisbögen bietet sich eine Parametrisierung der Form $x(t) = r_0\cos(t)$, $y(t) = r_0\sin(t)$ an.

(b) [1 Punkt] Berechnen Sie für die Kraft $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$ und mit Hilfe des Stoke'schen Satzes das Wegintegral, bei dem der Weg einen Kreis in der xy-Ebene mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung beschreibt.