

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Lösung - Blatt 6

DR. ANDREAS POENICKE, MSc. KARIM MNASRI

Abgabe: Mittwoch 29.11.2016**1. Bewegung in einem rotierenden Bezugssystem**

7 Punkte

- (a) [2 Punkte] Nach der Zeichnung gilt

$$\mathbf{r}' = R \mathbf{e}_z + \mathbf{r}$$

wobei R der Erdradius ist. Exakt gilt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -g_0 \mathbf{e}_z - \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (R \mathbf{e}_z + \mathbf{r})] - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Wir vernachlässigen die $\mathbf{r}$ -Abhängigkeit der Zentrifugalkraft,

$$-\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (R \mathbf{e}_z + \mathbf{r})] \approx -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R \mathbf{e}_z)$$

Wegen $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)$ gilt

$$-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R \mathbf{e}_z) = \omega^2 R \mathbf{e}_z.$$

Damit bekommen wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = (-g_0 + \omega^2 R) \mathbf{e}_z - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

- (b) [1 Punkt] Ohne die Corioliskraft vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_0(t)}{dt^2} = (-g_0 + \omega^2 R) \mathbf{e}_z,$$

und wir erhalten mit geeigneten Anfangsbedingungen

$$\mathbf{r}_0(t) = -\frac{1}{2}(g_0 - \omega^2 R)t^2 \mathbf{e}_z = -\frac{1}{2}g_{\text{eff}}t^2 \mathbf{e}_z.$$

- (c) [2 Punkt] Wir gehen mit dem Ansatz
- $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{u}(t)$
- in die Differentialgleichung,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = g_{\text{eff}} \mathbf{e}_z - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

und bekommen wegen

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_0(t)}{dt^2} = -g_{\text{eff}} \mathbf{e}_z$$

als verbleibende Gleichung

$$\frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} = -2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

Integration über t zusammen mit $\mathbf{u}(0) = \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$ und $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ liefert dann die Differentialgleichung 1. Ordnung,

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) = -2\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{r}_0(t) + \mathbf{u}(t)].$$

- (d) [2 Punkte] Für kleine Abweichungen vom Lot, d.h. für
- $|\mathbf{u}(t)| \ll |\mathbf{r}_0(t)|$
- können wir
- $\mathbf{r}(t)$
- durch
- $\mathbf{r}_0(t)$
- ersetzen und bekommen als Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0(t) = \boldsymbol{\omega} \times (g_{\text{eff}} t^2 \mathbf{e}_z) = g_{\text{eff}} t^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z$$

mit der Lösung

$$\mathbf{u}(t) = \frac{g_{\text{eff}}}{3} t^3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z = -\frac{g_{\text{eff}}}{3} \omega t^3 \mathbf{e}_y.$$

2. Senkrechter Fall über einer rotierenden Scheibe

5 Punkte

- (a) [2 Punkte] Im Allgemein gilt:

Der Ortsvektor $\mathbf{r}$ in Zylinderkoordinaten lautet

$$\mathbf{r}' = \rho \mathbf{e}'_\rho + z \mathbf{e}'_z, \quad (1)$$

die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ in Zylinderkoordinaten lautet

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\rho} \mathbf{e}'_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}'_\phi + \dot{z} \mathbf{e}'_z, \quad (2)$$

und die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten lautet

$$\ddot{\mathbf{r}}' = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{e}'_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) \mathbf{e}'_\phi + \ddot{z} \mathbf{e}'_z. \quad (3)$$

Desweiteren gilt für die Beschleunigung eines Teilchens der Masse m an der Stelle $\mathbf{r}(t)$ in einem Nicht-Inertialsystem, das mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um den Ursprung rotiert

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \frac{\mathbf{F}}{m} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (4)$$

Gleichsetzen von Gl. (3) und Gl. (4) erhalten wir (ohne die Striche mit zu nehmen)

$$\begin{aligned} (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi + \ddot{z} \mathbf{e}_z &= \frac{\mathbf{F}}{m} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &\stackrel{(1) \text{ und } (2)}{=} -g \mathbf{e}_z - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= -g \mathbf{e}_z - 2\omega \dot{\rho} \mathbf{e}_\phi + 2\omega \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\rho + \omega^2 \rho \mathbf{e}_\rho \end{aligned}$$

wobei wir die Relationen $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_\rho$ benutzt haben.

- (b) [3 Punkte] Betrachten wir nun die Komponenten für die drei Basisvektoren einzeln, erhalten wir die drei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho : \quad & \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 = 2\omega \dot{\phi} \rho + \omega^2 \rho \\ \mathbf{e}_\phi : \quad & 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} = -2\omega \dot{\rho} \\ \mathbf{e}_z : \quad & \ddot{z} = -g \end{aligned}$$

Zuerst lösen wir die $\mathbf{e}_z$ -Gleichung um den Zeitpunkt für den Aufprall zu bestimmen.

$$z(0) = h, \quad \dot{z}(0) = 0 \Rightarrow z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Aufprall auf Platte bei $z(T) = 0$ liefert $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Nun multiplizieren wir die $\mathbf{e}_\phi$ -Gleichung mit ρ :

$$2\dot{\rho}\rho\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi} = -2\omega\rho\dot{\rho} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = \frac{d}{dt}(-\omega\rho^2)$$

Integration liefert

$$\rho^2\dot{\phi} + \omega\rho^2 = \text{const} = 0, \quad \text{da} \quad \dot{\phi}(0) = -\omega$$

oder

$$\dot{\phi} = -\omega \Leftrightarrow \phi(t) = -\omega t + \phi_0.$$

Das Vorzeichen vor ω kommt dadurch zustande, dass das Teilchen anfangs in Ruhe ist, jedoch nur in Bezug auf ein nicht rotierendes Koordinatensystem. Daher gilt im rotierenden zylindrischen Koordinatensystem $\dot{\phi} = -\omega$. Einsetzen des Ergebnisses in die $\mathbf{e}_\rho$ -Gleichung gibt uns

$$\ddot{\rho} = 0.$$

Mit den Anfangsbedingungen $\rho(0) = R, \dot{\rho}(0) = 0$ erhalten wir als Lösung

$$\rho(t) = R.$$

Damit ist der Ort des Aufpralls

$$\rho(T) = R, \quad \phi(T) = \phi_0 - \omega\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

3. Elementarsätze der Vektoralgebra

[6 × 0.5 Punkte]

Bemerkung: ϕ und $\mathbf{f}$ sind zweimal stetig partiell differenzierbar, d.h. es gilt $\partial_i \partial_j \phi = \partial_j \partial_i \phi$ und $\partial_i \partial_j f_k = \partial_j \partial_i f_k$.

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \text{rot grad } \phi &= \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi) = \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{antisymm.}} \mathbf{e}_i \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_j \partial_k + \partial_k \partial_j)}_{\text{symmetrisch}} \phi = 0 \\
 &\stackrel{\text{oder}}{=} \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k + \epsilon_{ikj} \partial_j \partial_k) \phi \\
 &= \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k - \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k) \phi = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \text{div rot } \mathbf{f} &= \partial_i (\nabla \times \mathbf{f})_i = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j f_k \\
 &= \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{antisymm.}} \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_i \partial_j + \partial_j \partial_i)}_{\text{symmetrisch}} f_k = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \quad \text{div grad } \phi = \partial_i (\partial_i \phi) = \partial_i^2 \phi = \Delta \phi$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad \text{rot rot } \mathbf{f} &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \mathbf{e}_i \partial_j \partial_l f_m \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l f_m \mathbf{e}_i \\
 &= \partial_j \partial_i f_j \mathbf{e}_i - \partial_j \partial_j f_i \mathbf{e}_i \\
 &= \underbrace{\partial_i \mathbf{e}_i}_{\text{grad}} \underbrace{\partial_j f_j}_{\text{div } \mathbf{f}} - \partial_j \partial_j \underbrace{f_i \mathbf{e}_i}_{\mathbf{f}} \\
 &= \text{grad div } \mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}
 \end{aligned}$$

$$\text{(v)} \quad \text{div } \phi \mathbf{f} = \partial_i (\phi f_i) = (\partial_i \phi) f_i + \phi \partial_i f_i = \text{grad } \phi \cdot \mathbf{f} + \phi \text{ div } \mathbf{f}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vi)} \quad \text{rot } (\phi \mathbf{f}) &= \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\phi f)_k \\
 &= \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i (\partial_j \phi) f_k + \phi \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j f_k \\
 &= \text{grad } \phi \times \mathbf{f} + \phi \text{ rot } \mathbf{f}
 \end{aligned}$$

4. Wegintegrale und Stoke'scher Satz

[5 Punkte]

(a) [4 × 1 Punkt] Gegeben sind die beiden Kräfte

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y) \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x)$$

(i) Für C_1 und $j = 1$:

Dieser Weg kann stückweise parametrisiert werden $\mathbf{r}_1(t) = (1, t)$ und $\mathbf{r}_2(t) = (t, 1)$ mit $t \in [1, 0]$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_1(t) \, dt + \int_0^1 \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2(t) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}(1, t) \cdot (0, 1) \, dt + \int_1^0 \frac{1}{1+t^2}(t, 1) \cdot (1, 0) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} \, dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} \, dt = 0 \end{aligned}$$

(ii) Für C_1 und $j = 2$:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_1(t) \, dt + \int_0^1 \mathbf{F}_2(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2(t) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}(-t, 1) \cdot (0, 1) \, dt + \int_1^0 \frac{1}{1+t^2}(-1, t) \cdot (1, 0) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt \\ &= 2 \arctan(t) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(iii) Für C_2 und $j = 1$:

Entlang des zweiten Weges gilt $x^2 + y^2 = 1$ also $x(t) = 1 \cos(t)$ bzw. $y(t) = 1 \sin(t)$, so dass $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, mit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_{C_2} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1}(\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) \, dt = 0$$

(iv) Für C_2 und $j = 2$:

$$\int_{C_2} \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1}(-\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$$

Alternativer Lösungsweg: Kartesisch, ohne Paramaterisierung:

(i) Für C_1 und $j = 1$:

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &= \int_0^1 F_y|_{x=1} \, dy + \int_1^0 F_x|_{y=1} \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} \, dy - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = 0\end{aligned}$$

(ii) Für C_1 und $j = 2$:

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &= \int_0^1 F_y|_{x=1} \, dy + \int_1^0 F_x|_{y=1} \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \, dy - \int_0^1 \frac{-1}{1+x^2} \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt \\ &= 2 \arctan(t) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(iii) Für C_2 und $j = 1$:

Entlang des zweiten Weges gilt $x^2 + y^2 = 1$ also $y = \sqrt{1-x^2}$ bzw. $x = \sqrt{1-y^2}$.

$$\int_{C_2} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \int_1^0 \frac{x}{1} \, dx + \int_0^1 \frac{y}{1} \, dy = 0$$

(iv) Für C_2 und $j = 2$:

Entlang des zweiten Weges gilt $x^2 + y^2 = 1$ also $y = \sqrt{1-x^2}$ bzw. $x = \sqrt{1-y^2}$.

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &= \int_1^0 \frac{-y(x)}{1} \, dx + \int_0^1 \frac{x(y)}{1} \, dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx + \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \, dy \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, dt \quad (\text{Substituiere } t = \sin(u) \Rightarrow dt = \cos(u) \, du) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos(2u)] \, du \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(2u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

- (b) [1 Punkt] Im (a)-Teil haben wir gesehen, dass das Integral von $\mathbf{F}_2$ über $C_2 \frac{\pi}{2}$ ergibt. Schließen wir den Kreis, bekommen wir $4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$. Eine explizite Berechnung durch Parametrisierung der Kurve, ergibt

$$\begin{aligned} \oint_{(C_R(0,0))} \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} (-R \sin(t), R \cos(t)) \cdot (-R \sin(t), R \cos(t)) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \end{aligned}$$

wobei die Kurve diesmal durch $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$, mit $t \in [0, 2\pi]$, parametrisiert wurde. Das Wegintegral über einen geschlossenen Weg ist also ungleich Null. Somit ist die Kraft $\mathbf{F}_2$ nicht konservativ und besitzt daher kein Potential U mit $\mathbf{F}_2 = \text{grad } U$. Dennoch gilt die Integrabilitätsbedingung $\partial_x F_{2,y} - \partial_y F_{2,x} = 0$, denn

$$[\text{rot } \mathbf{F}_2(\mathbf{r})]_z = \partial_x F_{2,y}(x, y) - \partial_y F_{2,x}(x, y) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Dies entspricht $[\text{rot } \tilde{\mathbf{F}}_2(\mathbf{r})]_z = 0$, mit $\tilde{\mathbf{F}}_2 = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x, 0)$. Das Wegintegral laut Stokes würde

$$\int_{C_R(0,0)} [\text{rot } \mathbf{F}_2(\mathbf{r})]_z \, df = 0,$$

liefern, was suggerieren würde, dass die Kraft konservativ ist. Was läuft schief? $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ist zwar notwendig damit ein Potential existiert, aber für beliebige Gebiete nicht hinreichend. Eine Bestimmung eines Potentials U über das Verfahren $\mathbf{F} = -\text{grad } U$ würde versagen:

$$\begin{aligned} -\partial_x U(x, y) &= F_{2,x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{y} \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}, \\ -\partial_y U(x, y) &= F_{2,y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Aus der Integration, der ersten Gleichung folgt:

$$U(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + A(y).$$

Man mache die Probe durch das Ableiten nach y und durch den Vergleich mit $F_{2,x}$

$$\partial_y U(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2} + A'(y) \stackrel{!}{=} -F_2 = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

Somit ist $A'(y) = 0$ und das Potential

$$U(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \text{const}.$$

O.B.d.A $\text{const} = 0$. Allerdings ist dieses Potential im Definitionsbereich der dazugehörigen Kraft, also in $C_R^*(0, 0) = C_R(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}$, nicht stetig, insbesondere auf der x -Achse. Es gilt nämlich

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2} & \text{für } x > 0 \\ \mp \frac{\pi}{2} & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Somit ist $U(x, y)$ in $C_R^*(0, 0)$ nicht stetig und daher in $C_R^*(0, 0)$ auch kein Potential.

Fazit: Die Integrabilitätsbedingung ist zwar notwendig dafür, dass eine Kraft eine konservative Kraft ist, aber nicht hinreichend: Ist sie erfüllt, bedeutet dies nicht notwendiger Weise, dass die Kraft konservativ ist, wie das Beispiel $\mathbf{F}_2$ gezeigt hat.

PS: In den Halbebenen $H^\pm = C_R^*(0, 0) \setminus \{(x, y) \mid \mp y > 0\}$ ist $U(x, y)$ differenzierbar und es gilt $\mathbf{F}_2 = -\text{grad } U$.

PS 2: Gilt $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in einem *einfach zusammenhängenden* Gebiet, so ist die Bedingung hinreichend. $\mathbf{F}$ ist wegunabhängig integrierbar und besitzt ein Potential.