Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Blatt 7
Abgabe: 6.12.2016

1. Kraftfelder — 3 Punkte

Gegeben sind im zweidimensionalen Raum die Kraftfelder

$$\mathbf{F}_1(x,y) = \begin{pmatrix} -2xe^{x^2-y^2} \\ 2ye^{x^2-y^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+a^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \text{ mit } a \neq 0$$

(a) Finden Sie das Potential für das Feld $\mathbf{F}_1(x,y)$ bzw. $\mathbf{F}_2(x,y)$, sofern dieses existiert.
Hinweis: Berechnen Sie die auf der Geraden von $(0,0)$ nach (x',y') geleistete Arbeit. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ableiten.

(b) Existiert das Potential, so skizzieren Sie die Äquipotentiallinien und die Feldlinien der Kraft.

2. Potentialfeld — 4 Punkte

Gegeben ist das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3}(ax, by, cz)^T \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{r}| \text{ und } a,b,c = \text{ const.}$$

(a) Bestimmen Sie eine (einfache) Relation für die Konstanten $a, b, c \neq 0$, bei der $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ eine Potentialkraft ist.

(b) Bestimmen Sie für diese Potentialkraft das Potential $U(\mathbf{r})$.

(c) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_C \mathbf{F}d\mathbf{r}$ wobei C eine geschlossene Kreisbahn um z-Achse (mit beliebigem z) beschreibt.

(d) Ist jedes Zentralkraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}$ ein konservatives Kraftfeld? Begründen Sie die Aussage mathematisch.

3. Bewegung im Potentialfeld — 5 Punkte

Die Bewegung eines Massepunkts der Masse m wird beschrieben durch eine Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ mit $x(t) = x_0\cos(\omega_1 t)$ und $y(t) = y_0\sin(\omega_2 t)$.

(a) Finden Sie das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ das dieser Bewegung zugrunde liegt. Unter welcher Bedingung ist dies ein Zentralkraftfeld?

(b) Bestimmen Sie die potentielle Energie $U(\mathbf{r})$ des Massepunkts.
Hinweis: Die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ eignet sich nicht als Parametrisierung für die Bestimmung des Potentials

(c) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Massepunkts. Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie erhalten ist.

4. Energieerhaltung — 2 Punkte

Zeigen Sie allgemein: Für einen Massepunkt in einem konservativen Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ ist die Energie

$$E = E(\mathbf{r},\mathbf{v}) = T + U = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r})$$

erhalten, d.h. entlang jeder Bahnkurve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ zeitlich konstant.

5. Taylorreihen I

4 Punkte

In vielen Fällen ist es hilfreich eine Funktion $f(x)$ durch ein Polynom

$$f(x) \approx P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

zu approximieren. Die Taylorentwicklung ist ein in der Physik häufig genutztes Hilfsmittel, um eine solche Approximation zu finden. Ist eine Funktion $f(x)$ bei $x = x_0$ hinreichend oft differenzierbar, so ist das Taylorpolynom n-ten Grades $T_n(x)$ mit

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

eine Approximation der Funktion $f(x) \approx T_n(x)$ in einer Umgebung von x_0. Hierbei bezeichnet $f^{(k)}(x_0)$ die k-te Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

Weiter ist jede analytische Funktion $f(x)$ unendlich oft differenzierbar, und lässt sich in einer Umgebung $U(x_0)$ durch eine Taylorreihe darstellen, d.h. es gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

für alle x für die diese Reihe konvergiert.

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die k-te Ableitung und geben Sie die Taylorreihe an

(a) $f(x) = e^x$ für $x_0 = 0$

(b) $f(x) = \sin(x)$, für $x_0 = 0$ und $x_0 = \pi/2$

(c) $f(x) = \cos(x)$, für $x_0 = 0$ und $x_0 = \pi/2$

(d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ für $x_0 = 0$

6. Taylorreihen II

2 Punkte

Nicht immer ist das Berechnen der Ableitungen der geschickteste Weg um die Taylorreihe zu bestimmen. Häufig ist es günstiger auf bereits bekannte Potenzreihendarstellungen zurückzugreifen.

Nutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 5, um die Taylorreihen um $x_0 = 0$ für folgende Funktionen zu finden:

(a) $f(x) = xe^{x^2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$