

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Lösung - Blatt 7

DR. ANDREAS POENICKE, MSC. KARIM MNASRI

Abgabe: 6.12.2016

1. Kraftfelder

3 Punkte

Gegeben sind die Kraftfelder

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -2x e^{x^2-y^2} \\ 2y e^{x^2-y^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2 + a^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \neq 0$$

(a) Finden Sie das Potential für das Feld $\mathbf{F}_1$ bzw. $\mathbf{F}_2$, sofern dieses existiert.Für $\mathbf{F}_1$ gilt

$$\partial_x F_{1,y} = \partial_y F_{1,x} = 4xy e^{x^2-y^2}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$. Das Potential finden wir mit Hilfe der Parametrisierung $\mathbf{r}(t) = (x't, y't)$ mit $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} U(x', y') - U(0, 0) &= - \int_C \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = - \int_0^1 \begin{pmatrix} -2x't e^{(x't)^2 - (y't)^2} \\ 2y't e^{(x't)^2 - (y't)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 2(x'^2 - y'^2) t e^{(x'^2 - y'^2) t^2} dt = e^{x'^2 - y'^2} - 1. \end{aligned}$$

Wir überprüfen das Ergebnis durch Berechnung des Gradienten

$$\nabla U(x, y) = \begin{pmatrix} 2x e^{x^2-y^2} \\ -2y e^{x^2-y^2} \end{pmatrix} = -\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$$

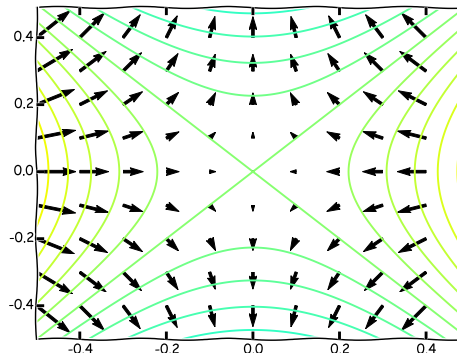
haben das gesuchte Potential also gefunden.

Für $\mathbf{F}_2$ gilt

$$\partial_x F_{2,y} = \frac{y^2 - x^2 + a^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^2} \quad \text{und} \quad \partial_y F_{2,x} = \frac{y^2 - x^2 - a^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}$$

und damit $\partial_x F_{2,y} \neq \partial_y F_{2,x}$. $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$ ist daher keine Potentialkraft.

(b) Existiert das Potential, so skizzieren Sie die Äquipotentiallinien und die Feldlinien der Kraft.

Für die Äquipotentiallinien von $\mathbf{F}_1$ gilt $x^2 - y^2 = c$, es handelt sich also Hyperbeln.Abbildung 1: Skizze der Äquipotential- und Feldlinien des Potentials $U_1(\mathbf{r}) = e^{x^2-y^2}$

2. Potentialfeld

4 Punkte

Gegeben ist das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3}(ax, by, cz)^T \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{r}| \quad \text{und} \quad a, b, c = \text{const.}$$

- (a) Bestimmen Sie eine (einfache) Relation für die Konstanten $a, b, c \neq 0$ bei der $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ eine Potentialkraft ist.

Bedingung damit es sich bei $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ um ein Potentialkraft handeln kann ist

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^5} \begin{pmatrix} 3yz(b-c) \\ 3xz(c-a) \\ 3xy(a-b) \end{pmatrix} = 0$$

was für $b = c = a$ erfüllt ist. Damit ist $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{a}{r^3}\mathbf{r}$.

- (b) Bestimmen Sie für diese Potentialkraft das Potential $U(\mathbf{r})$. Das Potential lässt sich analog zu Aufgabe 1 durch Integration finden, wir legen den Bezugspunkt jetzt allerdings ins Unendliche:

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^1 \frac{a}{r^3 t^3} r^2 t \, dt = \frac{a}{r}.$$

Das dies das korrekte Potential ist lässt sich durch $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ leicht überprüfen.

- (c) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r}$ wobei C eine geschlossene Kreisbahn um z -Achse (mit beliebigem z) beschreibt.

Die Kreisbahn wird in Zylinderkoordinaten durch $(x, y, z) = (\rho_0 \cos \phi, \rho_0 \sin \phi, z_0)$ mit $\phi = [0, 2\pi]$ parametrisiert. Damit ergibt sich für

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \rho_0 \cos \phi \\ \rho_0 \sin \phi \\ z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\rho_0 \sin \phi \\ \rho_0 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0^2}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{3/2}} (-\cos \phi \sin \phi + \cos \phi \sin \phi) d\phi = 0. \end{aligned}$$

- (d) Ist jedes Zentralkraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ ein konservatives Kraftfeld? Begründen Sie die Aussage mathematisch.

Ja. Es gilt dann immer

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left[\frac{d}{dr} \frac{f(r)}{r} \right] (\nabla r) \times \mathbf{r} + \frac{f(r)}{r} \nabla \times \mathbf{r} = \left[\frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} \right] \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{r} + 0 = 0,$$

und es lässt sich immer ein Potential $V(r)$ finden das gilt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r) = -V'(r) \nabla r = -V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

3. Bewegung im Potentialfeld

5 Punkte

Die Bewegung eines Massepunkts der Masse m wird beschrieben durch eine Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ mit $x(t) = x_0 \cos \omega_1 t$ und $y(t) = y_0 \sin \omega_2 t$.

- (a) Finden Sie das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ das dieser Bewegung zugrunde liegt. Unter welcher Bedingung ist dies ein Zentralkraftfeld?

Zuerst bestimmen wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x_0 \omega_1 \sin \omega_1 t & \dot{y}(t) &= y_0 \omega_2 \cos \omega_2 t \\ \ddot{x}(t) &= -x_0 \omega_1^2 \cos \omega_1 t & \ddot{y}(t) &= -y_0 \omega_2^2 \sin \omega_2 t.\end{aligned}$$

Mit $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\ddot{\mathbf{r}}(t)$ erhalten wir daher

$$F_x(\mathbf{r}) = -m\omega_1^2 x \quad F_y(\mathbf{r}) = -m\omega_2^2 y.$$

Gilt $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, so ist $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m\omega^2 \mathbf{r}$ ein Zentralfeld.

- (b) Bestimmen Sie die potentielle Energie $U(\mathbf{r})$ des Massepunkts.

Das Potential kann ganz analog zu Aufgabe 1 gefunden werden mit

$$U(\mathbf{r}) = \int_0^1 m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) t dt = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2)$$

oder via

$$U(\mathbf{r}) = \int_0^x m\omega_1^2 x' dx' + \int_0^y m\omega_2^2 y' dy' = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2).$$

- (c) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Massepunkts. Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie erhalten ist.

Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$T(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}(t)^2 = \frac{m}{2} (x_0^2 \omega_1^2 \sin^2 \omega_1 t + y_0^2 \omega_2^2 \cos^2 \omega_2 t).$$

Die Gesamtenergie ist

$$\begin{aligned}E &= T + U \\ &= \frac{m}{2} (x_0^2 \omega_1^2 \sin^2 \omega_1 t + y_0^2 \omega_2^2 \cos^2 \omega_2 t + \omega_1^2 x(t)^2 + \omega_2^2 y(t)^2) \\ &= \frac{m}{2} (x_0^2 \omega_1^2 \sin^2 \omega_1 t + y_0^2 \omega_2^2 \cos^2 \omega_2 t + \omega_1^2 x_0^2 \cos^2 \omega_1 t + \omega_2^2 y_0^2 \sin^2 \omega_2 t) \\ &= \frac{m}{2} (x_0^2 \omega_1^2 + y_0^2 \omega_2^2) = \text{const.}\end{aligned}$$

4. Energieerhaltung

2 Punkte

Zeigen Sie allgemein: Für einen Massepunkt in einem konservativen Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ ist die Energie

$$E = E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = T + U = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r})$$

erhalten, d.h. entlang jeder Bahnkurve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ zeitlich konstant.

Die Energieerhaltung ergibt sich direkt durch die zeitliche Ableitung, wobei noch die Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ genutzt wird:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} + \nabla U(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} \\ &= \dot{\mathbf{r}}\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{r}}\nabla U(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}}[-\nabla U(\mathbf{r}) + \nabla U(\mathbf{r})] = 0.\end{aligned}$$

5. Taylorreihen I

4 Punkte

In vielen Fällen ist es hilfreich eine Funktion $f(x)$ durch ein Polynom

$$f(x) \approx P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

zu approximieren. Die Taylorentwicklung ist ein in der Physik häufig genutztes Hilfsmittel, um eine solche Approximation zu finden. Ist eine Funktion $f(x)$ bei $x = x_0$ hinreichend oft differenzierbar, so ist das Taylorpolynom n -ten Grades $T_n(x)$ mit

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

eine Approximation der Funktion $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 . Hierbei bezeichnet $f^{(k)}(x_0)$ die k -te Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

Weiter ist jede analytische Funktion $f(x)$ unendlich oft differenzierbar, und lässt sich in einer Umgebung $U(x_0)$ durch eine Taylorreihe darstellen, d.h. es gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

für alle x für die diese Reihe konvergiert.

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die k -te Ableitung und geben Sie die Taylorreihe an.

(a) $f(x) = e^x$ für $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x)^k.$$

(b) $f(x) = \sin(x)$, für $x_0 = 0$ und $x_0 = \pi/2$

$$f^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n \sin(x) & \text{für } k = 2n \\ (-1)^n \cos(x) & \text{für } k = 2n + 1. \end{cases}$$

Damit ist

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} (x - x_0)^{2k} + \frac{f^{(2k+1)}(x_0)}{(2k+1)!} (x - x_0)^{2k+1} \quad (1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(x_0)}{(2k)!} (x - x_0)^{2k} + \frac{(-1)^k \cos(x_0)}{(2k+1)!} (x - x_0)^{2k+1}. \quad (2)$$

Für $x_0 = 0$ gilt $\sin(x_0) = 0$, $\cos(x_0) = 1$ und daher

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

für $x_0 = \pi/2$ dagegen $\sin(x_0) = 1$, $\cos(x_0) = 0$ und somit

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k} \quad \left[= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \text{ (s.u.)} \right].$$

(c) $f(x) = \cos(x)$, für $x_0 = 0$ und $x_0 = \pi/2$

$$f^{(k)} = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n \cos(x) & \text{für } k = 2n \\ (-1)^{n+1} \sin(x) & \text{für } k = 2n + 1. \end{cases}$$

Damit ist

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} (x - x_0)^{2k} + \frac{f^{(2k+1)}(x_0)}{(2k+1)!} (x - x_0)^{2k+1} \quad (3)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(x_0)}{(2k)!} (x - x_0)^{2k} + \frac{(-1)^{k+1} \sin(x_0)}{(2k+1)!} (x - x_0)^{2k+1}. \quad (4)$$

Für $x_0 = 0$ gilt $\sin(x_0) = 0$, $\cos(x_0) = 1$ und daher

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

für $x_0 = \pi/2$ gilt hingegen $\sin(x_0) = 1$, $\cos(x_0) = 0$ und somit ist

$$\cos(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \quad \left[= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \text{ (s.o.)} \right].$$

(d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ für $x_0 = 0$

$$f^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!} \frac{x^k}{(1-x_0)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

6. Taylorreihen II

2 Punkte

Nicht immer ist das Berechnen der Ableitungen der geschickteste Weg um die Taylorreihe zu bestimmen. Häufig ist es günstiger auf bereits bekannte Potenzreihendarstellungen zurückzugreifen.

Nutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 5 um die Taylorreihen um $x_0 = 0$ für folgende Funktionen zu finden:

(a) $f(x) = xe^{x^2}$

$$f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1}.$$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$