Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL
DR. ANDREAS POENICKE, MSC. KARIM MNASRI

Blatt 8
Abgabe: 13.12.2016

1. Das stark ausgelenkte mathematische Pendel [9 Punkte]

Das mathematische Pendel, auch ebenes Pendel genannt, ist ein idealisiertes Fadenpendel. Hierbei kann eine als punktförmig gedachte Masse, die mittels einer masselosen Pendelstange an einem Punkt aufgehängt ist, in einer vertikalen Ebene hin und her schwingen. Reibungseffekte, insbesondere der Luftwiderstand, werden vernachlässigt. Charakterisiert wird das mathematische Pendel durch folgende Eigenschaften:

- Jegliche Reibung und die Ortsabhängigkeit der Schwerkraft werden vernachlässigt.
- Die gesamte Masse m ist in einem Punkt konzentriert, während die Masse der Stange vernachlässigt wird.
- Die Länge l des Pendels ist konstant.

Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe ausschließlich in Polarkoordinaten, d.h. in einer $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi)$-Basis. Lösungen in anderen Koordinaten werden nicht bewertet.

(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung der Masse m in Polarkoordinaten. Zeigen Sie des weiteren, dass für kleine Anfangsauslenkungen $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ die Schwingungsdauer $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ beträgt, wobei g die Gravitationskonstante bezeichnet.

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie, für beliebige Auslenkungen ϕ, dass die Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2}\left(l\dot{\phi}\right)^2 + mgl[1-\cos(\phi)] \tag{1}$$

erhalten ist und geben Sie für geeignete Anfangsbedingungen die Gesamtenergie an.

(c) [3 Punkte] In dieser Teilaufgabe, sollen Sie für beliebige Anfangsauslenkungen $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ zeigen, dass für die Schwingungsdauer folgendes Integral gilt

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\psi)}}\,, \tag{2}$$

mit $k = \sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right)$ und $k\sin(\psi) = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$. Führen Sie dabei folgende Schritte durch:

(i) Führen Sie für Gl. (1), analog zur Vorlesung, eine Trennung der Variablen durch. D.h. finden Sie eine Funktion $f(\phi)$ mit

$$\mathrm{d}t = f(\phi)\mathrm{d}\phi\,. \tag{3}$$

(ii) Integrieren Sie Gl. (3) indem Sie ϕ, wie oben angegeben, durch ψ substituieren. Überzeugen Sie sich kurz von den Integrationsgrenzen für ψ.
Hinweis: Nutzen Sie vorher geeignete Additionstheoreme.

(d) [2 Punkte] Man entscheide mit Hilfe einer Taylorentwicklung nach k^2 bis zur Ordnung k^2, ob die Schwingungsdauer aus Gl. (2) für große Anfangsauslenkungen ϕ_0 größer oder kleiner als T_0 ist. Das Ergebnis ist anschaulich zu deuten.

2. Durch Faden verbundene Massen [5 Punkte]

Eine punktförmige Masse m ist mit einem Faden verbunden, der durch ein kleines Loch in einem unendlich ausgedehnten Tisch geführt wird und an dessen anderem Ende eine zweite Masse M hängt (Skizzieren Sie sich Situation zur besseren Vorstellung). Zur Zeit $t = 0$ befinde sich die Masse m im Abstand ρ_0 vom Loch und habe eine rein tangential gerichtete Geschwindigkeit v_ϕ, also eine Geschwindigkeit die senkrecht zum verbindenden Faden steht und natrlich parallel zur Tischplatte ist. Die Masse M ruht dementsprechend bei $t = 0$.
Hinweise:

- *Machen Sie von Erhaltungssätzen Gebrauch.*
- *Drücken Sie die Gesamtenergie als Funktion des Gesamtdrehimpulses aus.*
- *Lösen Sie diese Aufgabe ausschließlich in Zylinderkoordinaten, d.h. in einer* $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$-*Basis. Lösungen in anderen Koordinaten werden nicht bewertet.*

(a) [2 Punkte] Geben Sie die Gesamtenergie und den Gesamtdrehimpuls des Systems an.

(b) [2 Punkte] Bestimmen Sie den im Laufe der Zeit erreichbaren Minimal- und Maximalabstand der punktförmigen Masse m vom Loch in Abhängigkeit der Massen und Anfangsbedingungen.

(c) [1 Punkt] Welche Bedingung muss für den Drehimpuls gelten, damit sich eine Kreisbahn für die Bewegung der punktförmigen Masse m ergibt?

3. Langreichweitige Rakete [6 Punkte]

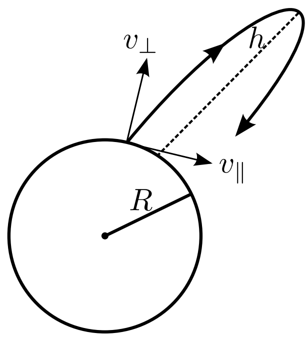

Abbildung 1: Eine langreichweitige Rakete wird von der Erdoberfläche mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v} = (v_\parallel, v_\perp)$ abgeschossen.

Eine langreichweitige Rakete wird von der Erdoberfläche (mit Radius R) mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v} = (v_\parallel, v_\perp)$ abgeschossen. Die Reibungskraft und die Rotation der Erde sollen vernachlässigt werden. Der Treibstoffverbrauch während des Flugs soll auch vernachlässigt werden. Allerdings, soll die exakte Gravitationskraft angenommen werden.

(a) [1 Punkt] Warum gelten hier Drehimpuls- und Energieerhaltung? (Maximal zwei Sätze)

(b) [2 Punkte] Erfassen Sie diese Erhaltungssätze mathematisch und nutzen Sie diese, um die radiale Anfangsgeschwindigkeit $v_\perp$ als Funktion der maximalen Flughöhe h und der tangentialen Anfangsgeschwindigkeit $v_\parallel$ zu berechnen.

(c) [1 Punkt] Bestimmen Sie die Fluchtgeschwindigkeit $v_{\perp,\text{Flucht}}$ und überprüfen Sie das Ergebnis aus der Vorlesung für den Fall $v_\parallel = 0$.

(d) [2 Punkte] Bestimmen Sie aus der Drehimpuls- und der Energieerhaltung für $\frac{h}{R} \ll 1$ näherungsweise die Flughöhe h. Welche Flughöhe bekommen Sie für $v_\parallel = 0$? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis, mit dem Ergebnis Aufgabe 3(b) aus Blatt 4 für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = 0$. Was impliziert diese Näherung für die Gravitationskraft?
Hinweis: Führen Sie hierfür eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung in $\frac{h}{R}$ *durch.*