Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Lösung - Blatt 8
Abgabe: Mittwoch 13.12.2016

1. Das stark ausgelenkte mathematische Pendel [9 Punkte]

(a) [2 Punkte] Aufgrund der konstanten Pendellänge ($\rho = l$) lautet die Bahnkurve in Polarkoordinaten $\boldsymbol{r}(t) = l\,\mathbf{e}_\rho$. Der Winkel $\phi(t)$ ist somit der einzige Freiheitsgrad. Daraus folgt der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\boldsymbol{r}} = l\,\dot{\mathbf{e}}_\rho = l\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi$. Somit lautet die Beschleunigung

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi) = l\ddot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi - l\dot{\phi}^2\,\mathbf{e}_\rho\,.$$

Die Kraft ist $\boldsymbol{F} = mg\,(\cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi)$. Vergleichen wir diese mit der Beschleunigung bekommen wir folgende Bewegungsgleichungen:

$$\text{In } \mathbf{e}_\rho\text{-Richtung: } -ml\dot{\phi}^2 = mg\cos\phi\,, \quad (\rightarrow \text{ Fadenspannung})\,. \tag{1}$$

$$\text{In } \mathbf{e}_\phi\text{-Richtung: } \quad ml\ddot{\phi} = -mg\sin\phi\,, \quad (\rightarrow \text{ Dgl. in der Bahn})\,. \tag{2}$$

Für kleine Winkel, lässt sich die zweite Gleichung vereinfachen zu $\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0$. Dies ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Dementsprechend lautet die Periode $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

(b) [2 Punkte] Wir zeigen nun, dass die Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2}\left(l\dot{\phi}\right)^2 + mgl[1-\cos(\phi)] \tag{3}$$

erhalten ist. Wir überzeugen uns, indem wir nach der Zeit ableiten, dabei bekommen wir

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = ml^2\dot{\phi}\,\ddot{\phi} + mgl\dot{\phi}\sin(\phi) = l\dot{\phi}\underbrace{[l\ddot{\phi} + mg\sin(\phi)]}_{\text{Bew. Gl. in } \mathbf{e}_\phi\text{−Richtung } =0} = 0\,.$$

Somit ist die Energie eine Konstante der Zeit, die durch ihren Wert bei $t = 0$ bestimmt werden kann. Für die Anfangsbedingungen $\phi(0) = \phi_0$ und $\dot{\phi}(0) = 0$ liefert der Energiesatz Gl.(3)

$$E_0 = mgl\,[1-\cos(\phi_0)]\,.$$

(c) [3 Punkte] In dieser Teilaufgabe soll für beliebige Anfangsauslenkungen, $\phi_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, gezeigt werden, dass für die Schwingungsdauer folgendes Integral gilt:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\psi)}}\,, \tag{4}$$

mit $k = \sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right)$ und $k\sin(\psi) = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$.

(i) [1 Punkt] Aus Gl. (3) bekommen wir

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2E}{ml^2} - \frac{2g}{l}\left[1-\cos(\phi)\right].$$

Wir wissen aus der Energieerhaltung, dass gilt $E = E_0 = mgl\,[1-\cos(\phi_0)]$. Somit erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{-\frac{g}{l}\cos(\phi_0) + \frac{g}{l}\cos(\phi)} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\cos(\phi)-\cos(\phi_0)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\cos(\phi)-\cos(\phi_0)}}$$

(ii) [2 Punkte] Durch zweifache Anwendung des Additionstheorems $\cos x = 1-2\sin^2(\frac{x}{2})$ bekommen wir

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\mathrm{d}\phi/2}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\phi_0}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\phi}{2die}\right)}}\,.$$

Nun Integrieren wir über einer viertel Periode, d.h. über die Zeit die benötigt wird um von 0 zurück nach ϕ_0 zu kommen:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\phi_0}\frac{\mathrm{d}\phi/2}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\phi_0}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}}\,.$$

Um auf Gl.(4) zu kommen müssen wir noch, wie oben angegeben, substituieren: $\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\phi_0}{2}\sin\psi$. Für $\phi = 0$ folgt $\sin\psi = 0$, also $\psi = 0$. Für $\phi = \phi_0$ folgt $\sin\psi = 1$, also $\psi = \frac{\pi}{2}$. Die Wurzel des Integrands ergibt sich mit $k = \sin\frac{\phi_0}{2}$, zu

$$\sqrt{\sin^2\left(\frac{\phi_0}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \sqrt{k^2-k^2\sin^2\psi} = k\cos\psi$$

Das Integrationsmaß wird zu

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi = k\cos(\psi)\mathrm{d}\psi$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\phi = \frac{k\cos(\psi)\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\,.$$

Aus diesen zwei Ergebnissen lässt sich das obigen Integral wie folgt schreiben

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\cos(\psi)\mathrm{d}\psi}{k\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$
$$\Rightarrow\ T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

(d) [2 Punkte] Es gilt $(1+x)^{-1/2} \approx 1-\frac{1}{2}x+\mathcal{O}(x^2)$. Damit folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \approx 1+\frac{k^2\sin^2\psi}{2}+\mathcal{O}(k^4)$$

und

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(1+\frac{k^2\sin^2\psi}{2}\Big)\mathrm{d}\psi$$
$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}k^2\right)$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Big[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\phi_0}{2}\right)\Big]\ > 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T_0$$

Für kleine Anfangsauslenkungen ϕ_0 erhält man die Schwingungsdauer der harmonischen Näherung $\sin(\phi) \approx \phi$. Wird der Anfangswinkel größer, so vergrößert sich auch die Schwingungsdauer, da die rücktreibende Kraft ($\propto \sin\phi$) kleiner als in der harmonischen Näherung ist.

2. Durch Faden verbundene Massen [5 Punkte]

(a) [2 Punkte] Geben Sie die Gesamtenergie und den Gesamtdrehimpuls des Systems an.

Zwecksmäßigerweise wählen wir zur Lösung des Problems Zylinderkoordinaten und legen den Nullpunkt des Koordinatensystems auf die Tischoberfläche. Die Länge des Seils sei l. In Zylinderkoordinaten ist die Geschwindigkeit gegeben durch

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\,\mathbf{e}_z\,.$$

Das Potential in unserem Fall ist

$$U(\boldsymbol{r}) = -Mg(l-\rho)\,,$$

die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho} + \rho^2\dot{\phi}^2) + \frac{M}{2}\dot{\phi}^2\,.$$

Da $U(\boldsymbol{r})$ ein Zentralpotential und die Bewegung reibungsfrei ist, gilt Energie- und Drehimpulserhaltung. In unserem Fall ist $\boldsymbol{L} = L\,\mathbf{e}_z$, wobei $L = m\rho^2\dot{\phi}$.
Die Gesamtenergie lautet also

$$E = T + U = \frac{m+M}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} + Mg(\rho - l)\,.$$

(b) [2 Punkte] Bestimmen Sie den im Laufe der Zeit erreichbaren Minimal- und Maximalabstand der punktförmigen Masse m vom Loch in Abhängigkeit der Massen und Anfangsbedingungen.

An den Extremstellen $\rho_{\min}$ und $\rho_{\max}$ gilt $\dot{\rho} = 0$, wobei

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{m+M}\big[E - U_{\text{eff}}(\rho)\big]}\,.$$

Hier haben wir das effektive Potential eingeführt

$$U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + Mg(\rho - l)\,,$$

und $\dot{\rho} = 0$ gilt genau dann, wenn

$$E = U_{\text{eff}}(\rho)\,. \tag{5}$$

Zu Beginn der Bewegung soll m den Abstand ρ_0 vom Loch haben und eine rein tangential gerichtete Geschwindigkeit besitzen, d.h. $\dot{\rho}(0) = 0$. Die Gesamtenergie ist somit $E = U_{\text{eff}}(\rho_0)$ und Gl. (5) wird zu

$$U_{\text{eff}}(\rho_0) = U_{\text{eff}}(\rho)\,.$$

Diese Gleichung führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho^2} + \frac{2mMg}{L^2}(\rho_0 - \rho) = \frac{L^2(\rho^2 - \rho_0^2)}{L^2\rho_0^2\rho^2} + \frac{2mMg(\rho_0-\rho)\rho_0^2\rho^2}{L^2\rho_0^2\rho^2} \\ &= \frac{L^2(\rho-\rho_0)(\rho+\rho_0)}{L^2\rho_0^2\rho^2} + \frac{2mMg(\rho_0-\rho)\rho_0^2\rho^2}{L^2\rho_0^2\rho^2} \\ &= \frac{(\rho-\rho_0)}{L^2\rho_0^2\rho^2}\big[L^2(\rho+\rho_0) - 2mMg\rho_0^2\rho^2\big] \end{aligned}$$

Dies ist eine kubische Gleichung mit den Lösungen $\rho_1 = \rho_0$ und

$$\rho_{2,3} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 + 8mMgL^2\rho_0^3}}{4mMg\rho_0^2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8mMg\rho_0^3/L^2}}{4mMg\rho_0^2L^2}$$

Die Lösung mit Minus entfällt, da $\rho > 0$ sein muss. Die Extremstellen sind nun

$$\rho_1 = \rho_0 \qquad \text{und} \qquad \rho_2 = L^2\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8mMg\rho_0^3}{L^2}}}{4mMg\rho_0^2}\,.$$

(c) [1 Punkt] Welche Bedingung muss für den Drehimpuls gelten, damit sich eine Kreisbahn für die Bewegung der punktförmigen Masse m ergibt?

Um diese Frage zu beantworten, kann man entweder $\rho_1 = \rho_2$ fordern und daraus die Bedingung für den Drehimpuls bestimmen, oder man verwendet das effektive Potential und fordert

$$\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{eff}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = 0\,.$$

Diese Forderung liefert

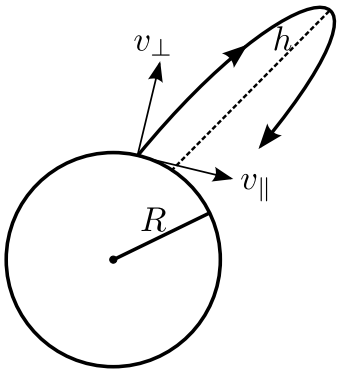
$$-\frac{L^2}{m\rho^3} + Mg = 0\,,$$

welches zu der folgende Bedingung für die Kreisbahn führt:

$$L^2 = mMg\rho^3$$

(Setzt man in dieses Ergebnis ρ_2 ein, erhält man auch $\rho_2 = \rho_1$.)

3. Langreichweitige Rakete [6 Punkte]



Eine langreichweitige Rakete wird von der Erdoberfläche (mit Radius R) mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v} = (v_\parallel, v_\perp)$ abgeschossen. Die Reibungskraft, die Rotation der Erde und der Treibstoffverbrauch während des Flugs sollen vernachlässigt werden. Allerdings, soll die exakte Gravitationskraft angenommen werden.

(a) [1 Punkt] Warum gelten hier Drehimpuls- und Energieerhaltung?

Da die Gravitationskraft konservativ ist, gilt Energieerhaltung. Die Gravitationskraft ist zusätzlich eine Zentralkraft, somit gilt auch Drehimpulserhaltung.

(b) [2 Punkte] Erfassen Sie diese Erhaltungssätze mathematisch und nutzen Sie diese, um die radiale Geschwindigkeit $v_\perp$ als Funktion der maximalen Flughöhe h und der tangentialen Anfangsgeschwindigkeit $v_\parallel$ zu berechnen.

Betrachten wir den Anfangszustand, sowie den Zustand bei dem die Rakete ihre maximale Höhe erreicht hat, bekommen wir

$$\text{Drehimpuls:} \qquad mRv_{\parallel,1} = m(R+h)v_{\parallel,2}\,, \tag{6}$$

$$\text{Gesamtenergie:} \qquad \frac{m}{2}\left(v_{\parallel,1}^2 + v_{\perp,1}^2\right) - \frac{GMm}{R} = \frac{m}{2}v_{\parallel,2}^2 - \frac{GMm}{R+h}\,, \tag{7}$$

wobei die Indizes 1 und 2 die Geschwindigkeiten auf der Erdoberfllache bzw. bei maximaler Höhe bezeichnen. Die radiale Geschwindigkeit bei maximal erreichter Höhe ist Null. Kombinieren wir diese zwei Gleichungen, d.h. setzen wir $v_{\parallel,2}^2$ von Gl. (6) in Gl. (7) ein, bekommen wir

$$\frac{m}{2}\left(v_{\parallel,1}^2 + v_{\perp,1}^2\right) - \frac{GMm}{R} = \frac{m}{2}\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 v_{\perp,1}^2 - \frac{GMm}{R+h}\,. \tag{8}$$

Nach $v_{\perp,1}$ aufgelöst liefert dies

$$v_{\perp,1} = \sqrt{\frac{\frac{2GM}{R}\frac{h}{R+h} - v_{\parallel,1}^2}{1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2}} \tag{9}$$

(c) [1 Punkt] Bestimmen Sie die Fluchtgeschwindigkeit $v_{\perp,\text{Flucht}}$ und überprüfen Sie das Ergebnis aus der Vorlesung für den Fall $v_\parallel = 0$.

Die Fluchtgeschwindigkeit gilt im Grenzfall $h \to \infty$. Dies in Gl. (9) eingesetzt liefert

$$v_{\perp,\text{Flucht}} = \lim_{h\to\infty} v_{\perp,1} = \sqrt{\frac{2GM}{R} - v_{\parallel,1}}\,.$$

Für den senkrechten Wurf, d.h. $v_\parallel = 0$, erhalten wir das Ergebnis aus der Vorlesung;

$$v_{\perp,\text{Flucht}}(v_\parallel = 0) = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\,.$$

(d) [2 Punkte] Bestimmen Sie aus der Drehimpuls- und der Energieerhaltung für $\frac{h}{R} \ll 1$ näherungsweise die Flughöhe h. Welche Flughöhe bekommen Sie für $v_{\parallel,1} = 0$? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis, mit dem Ergebnis Aufgabe 3(b) aus Blatt 4 für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = 0$.

Führen wir in Gl. (8) eine Taylorentwicklung für $h/R \ll 1$ durch, bekommen wir

$$\frac{m}{2}\big(v_{\parallel,1}^2 + v_{\perp,1}^2\big) - \frac{GMm}{R} \approx \frac{m}{2}\Big(1 - 2\frac{h}{R}\Big)v_{\perp,1}^2 - \frac{GMm}{R}\Big(1 - \frac{h}{R}\Big)\,.$$

Diese Gleichung ist linear in h und liefert

$$h \approx \frac{v_{\perp,1}^2 R}{2\big(\frac{GM}{R} - v_{\parallel,1}\big)}$$

Für den senkrechten Wurf bekommen wir

$$h = \frac{v_{\perp,1}^2 R}{2\frac{GM}{R}} = \frac{v_{\perp,1}^2}{2g} \quad \text{mit} \quad g = \frac{GM}{R^2}\,.$$

Das Ergebnis stimmt mit $h(\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0)$ überein. Die Näherung $h \ll R$ impliziert das Kraftgesetz $\boldsymbol{F} = -mg\,\mathbf{e}_z$. Dies ist die Näherung der exakten Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ für kleine Abstände.