Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Blatt 9
Abgabe: 20.12.2016

1. Drehimpuls unter Koordinatentransformation — 4 Punkte

In einem gegebenen Inertialsystem Σ sei der Drehimpuls durch $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ und das Drehmoment durch $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ gegeben

(a) [3 Punke] Das Koordinatensystem Σ' sei um den konstanten Vektor $\mathbf{r}_0$ gegen das System Σ verschoben. Berechnen Sie das Drehmoment $\mathbf{M}'$ und den Drehimpuls $\mathbf{L}'$ im verschobenen System Σ'. Leiten Sie darüber die Bilanzgleichung $\frac{\mathrm{d}L'}{\mathrm{d}t}$ für den Drehimpuls im System Σ' her.

(b) [1 Punkt] Im System Σ gelte Drehimpulserhaltung. Gilt diese auch im System Σ'? Betrachten Sie die beiden Fälle (i) System Σ ist kräftefrei, (ii) in System Σ gibt es ein Zentralkraftfeld.

2. Rotierende Feder — 12 Punkte

Auf einem Tisch ist eine Feder mit Federkonstante $k > 0$ so befestigt, dass sie frei um ihre Aufhängung rotieren kann. An der Feder ist ein Masse m angebracht, deren Bahnkurve durch den Abstand ρ von der Aufhängung der Feder und den Drehwinkel ϕ beschrieben wird. Die Rückstellkraft der Feder ist durch $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$ gegeben.

(a) [1 Punkt] Bestimmen Sie das Potential der Federkraft. Nutzen Sie dabei aus, dass es sich um ein Zentralkraftfeld handelt. Geben Sie den Drehimpuls der Masse in Zylinderkoordinaten an.

(b) [1 Punkte] Bestimmen und skizzieren Sie das effektive Potential. Diskutieren Sie anhand dieser Skizze: Bewegt sich der Massepunkt in einem begrenzten Bereich? Kann er sich auch bis ins Unendliche bewegen? Geben Sie die entsprechenden Energiebereiche an.

(c) [2 Punke] Welche Anfangsbedingungen müssen für $\rho(0)$, $\phi(0)$ und $\dot{\rho}(0)$, $\dot{\phi}(0)$ gegeben sein, damit sich die Masse auf einer Kreisbahn bewegt?

(d) [2 Punkte] Bestimmen Sie den minimalen und maximalen Abstand der Masse vom Aufhängungspunkt als Funktion der (beliebigen) Anfangsbedingungen.

(e) [3 Punkte] Nutzen Sie die Energieerhaltung, um die Bewegungsgleichung für $\rho(t)$ herzuleiten. Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch Trennung der Variablen.
Hinweis: Bei der Integration kann eine Substitution $u = \rho^2$ hilfreich sein. Weiter ist das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin\Big(\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\Big) \quad \text{für} \quad a < 0, b^2 - 4ac > 0$$

gegeben.

(f) [3 Punkte] Lösen Sie analog die Bewegungsgleichung für $\phi(r)$ und bestimmen Sie darüber $r(\phi)$.
Hinweis: Hier erweist sich die Substitution $u = 1/\rho^2$ als zweckmäßig.

3. Kegelschnitte 4 Punkte

In Polarkoordinaten sind Kegelschnitte durch die Gleichung

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \phi} \tag{1}$$

gegeben. In Abhängigkeit der Exzentrität ϵ weden hierdurch verschiedene Kurvenformen beschrieben:

(a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass für $0 \leq \epsilon < 1$ durch Gl.(1) eine Ellipse der Form

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

parametrisiert wird. Finden Sie den Zusammenhang zwischen den Parametern a, b also den Halbachsen der Ellipse und ϵ, k. Wo liegt der Mittelpunkt der Ellipse?
Hinweis: In der Polardarstellung (1) *liegt der Ursprung in einem Brennpunkt der Ellipse, also nicht in der Mitte der Ellipse, d.h.* $x' \neq x = r \cos \phi$.

(b) [1 Punkte] Zeigen Sie analog, dass für $\epsilon > 1$ durch Gl.(1) eine Hyperbel der Form

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

dargestellt wird. Finden Sie wieder Zusammenhang zwischen den Parametern a, b und ϵ, k. Wo liegt der Mittelpunkt?