

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Lösung - Blatt 9

DR. ANDREAS POENICKE, MSc. KARIM MNASRI

Abgabe: 20.12.2016**1. Drehimpuls unter Koordinatentransformation**

4 Punkte

In einem gegebenen Inertialsystem Σ sei der Drehimpuls durch $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ und das Drehmoment durch $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ gegeben

- (a) [3 Punkte] Das Koordinatensystem Σ' sei um den konstanten Vektor $\mathbf{r}_0$ gegen das System Σ verschoben. Berechnen Sie das Drehmoment $\mathbf{M}'$ und den Drehimpuls $\mathbf{L}'$ im verschobenen System Σ' . Leiten Sie darüber die Bilanzgleichung $\frac{d\mathbf{L}'}{dt}$ für den Drehimpuls im System Σ' her.

In Σ gilt

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \quad \text{mit} \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} .$$

Es soll sich um ein Inertialsystem handeln, es gilt also die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} .$$

In Σ' ist der Ortsvektor $\mathbf{r}'$ durch $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ gegeben. Damit gilt weiter $\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}}$ und $\ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}}$. Das Drehmoment ergibt sich nun zu

$$\mathbf{M}' = m\mathbf{r}' \times \mathbf{F}' = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (m\ddot{\mathbf{r}}') = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (m\ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{M} - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} .$$

Der Drehimpuls ist gegeben durch

$$\mathbf{L}' = m\mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}' = m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{L} - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p} .$$

Betrachten wir nun die Bilanzgleichung

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{M} - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} = \mathbf{M}'$$

so erfüllt der Drehimpuls im System Σ' die gleiche Bilanzgleichung für $\mathbf{L}'$ und $\mathbf{M}'$ wie in Σ für $\mathbf{L}$ und $\mathbf{M}$.

- (b) [1 Punkt] Im System Σ gelte Drehimpulserhaltung. Gilt diese auch im System Σ' ? Betrachten Sie die beiden Fälle (i) System Σ ist kräftefrei, (ii) in System Σ gibt es ein Zentralkraftfeld.

- (i) Ist das System Σ kräftefrei so gilt $\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}} = 0$ und $\mathbf{M}' = \mathbf{M} = 0$, und somit

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 .$$

Drehimpulserhaltung ist auch im System Σ' gegeben.

- (ii) Entsteht die Drehimpulserhaltung in Σ allerdings einer Zentralkraft $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$, so verschwindet das Drehmoment dort nur da Ortsvektor $\mathbf{r}$ und Kraft $\mathbf{F}$ immer parallel sind.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = f(r)\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0 \quad \text{und damit} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = 0 .$$

In dem verschobenen System Σ' ändert sich nun der Ortsvektor und der Drehimpuls ist nicht mehr erhalten:

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = -\mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} = -f(r)\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r} .$$

. (Da $\mathbf{r}_0$ konstant ist, kann $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}$ nur für ausgewählte Ortsvektoren $\mathbf{r}$ verschwinden.)

2. Rotierende Feder

12 Punkte

Auf einem Tisch ist eine Feder mit Federkonstante $k > 0$ so befestigt, dass sie frei um ihre Aufhängung rotieren kann. An der Feder ist ein Masse m angebracht, deren Bahnkurve durch den Abstand ρ von der Aufhängung der Feder und den Drehwinkel ϕ beschrieben wird. Die Rückstellkraft der Feder ist durch $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$ gegeben.

- (a) [1 Punkt] Bestimmen Sie das Potential der Federkraft. Nutzen Sie dabei aus, dass es sich um ein Zentralkraftfeld handelt. Geben Sie den Drehimpuls der Masse in Zylinderkoordinaten an.

Die Kraft ist durch $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$ gegeben. Wir können ausnutzen, dass es sich um eine Zentralkraft handelt. Da gilt

$$-\nabla U(r) = -U'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -kr\frac{\mathbf{r}}{r}$$

findet man sofort

$$U(\mathbf{r}) = U(r) = \frac{k}{2}r^2.$$

Der Drehimpuls ist durch

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = m\rho^2\dot{\phi}\mathbf{e}_z$$

gegeben.

- (b) [1 Punkte] Bestimmen und skizzieren Sie das effektive Potential. Diskutieren Sie anhand der Skizze: Bewegt sich der Massepunkt in einem begrenzten Bereich? Kann er sich auch bis ins Unendliche bewegen? Geben Sie die entsprechenden Energiebereiche an.

Das effektive Potential ist gegeben durch

$$U_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{k}{2}\rho^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

Anhand der Skizze sieht man, dass nur Bahnen für Energien $E \geq U_{\text{eff,min}}$ existieren können. Da das effektive Potential sowohl für $\rho \rightarrow 0$ als auch für $\rho \rightarrow \infty$ beliebig groß wird sind alle Bahnen beschränkt.

- (c) [2 Punkte] Welche Anfangsbedingungen müssen für $\rho(0)$, $\phi(0)$ und $\dot{\rho}(0)$, $\dot{\phi}(0)$ gegeben sein, damit sich die Masse auf einer Kreisbahn bewegt?

Für eine Kreisbahn muss gelten $\rho = \text{const.}$, also

$$\dot{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = U_{\text{eff}}(\rho)$$

und

$$\ddot{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dU_{\text{eff}}(\rho)}{d\rho} = 0.$$

Für die Energie des Massepunkts muss also gelten $E = U_{\text{eff,min}}$, was anschaulich gut verständlich ist: Der Massepunkt bleibt im Minimum des Potentials.

Wir bestimmen also das Minimum

$$\frac{dU_{\text{eff}}(\rho)}{d\rho} = k\rho - \frac{L^2}{m\rho^3} = 0 \quad \rightarrow \quad L = \sqrt{mk}\rho^2.$$

Für die Anfangsbedingungen ergibt sich somit

$$L = \sqrt{mk}\rho_0^2 = m\rho_0^2\dot{\phi}_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

weiter muss natürlich gelten $\dot{\rho}(0) = 0$. Eine Kreisbahn tritt dann unabhängig von ρ_0 und ϕ_0 auf.

- (d) [2 Punkte] Bestimmen Sie den minimalen und maximalen Abstand der Masse vom Aufhängungspunkt als Funktion der (beliebigen) Anfangsbedingungen.
Für die Umkehrpunkte $\rho_{\min/\max}$ muss gelten

$$\dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\rho))} = 0$$

und damit

$$E - U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{k}{2}\rho_0^2 + \frac{L^2}{2m\rho_0^2} - \frac{k}{2}\rho^2 - \frac{L^2}{2m\rho^2} = 0$$

wir müssen also die Nullstellen des quartischen Polynoms

$$\rho^4 - \left(\rho_0^2 + \frac{L^2}{mk\rho_0^2}\right)\rho^2 + \frac{L^2}{mk} = 0$$

finden. Wobei allerdings $\rho > 0$ erfüllt sein muss.

$$\begin{aligned}\rho_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(\rho_0^2 + \frac{L^2}{mk\rho_0^2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\rho_0^2 + \frac{L^2}{mk\rho_0^2}\right)^2 - 4\frac{L^2}{mk}} = \frac{1}{2}\left(\rho_0^2 + \frac{L^2}{mk\rho_0^2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\rho_0^2 - \frac{L^2}{mk\rho_0^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho_0^2 + \frac{L^2}{mk\rho_0^2}\right) \pm \frac{1}{2}\left(\rho_0^2 - \frac{L^2}{mk\rho_0^2}\right)\end{aligned}$$

$$\rho_1 = \rho_0, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{L^2}{mk\rho_0^2}} = \frac{\dot{\phi}_0}{\sqrt{k/m}}\rho_0$$

- (e) [3 Punkte] Nutzen Sie die Energieerhaltung, um die Bewegungsgleichung für $\rho(t)$ herzuleiten. Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch Trennung der Variablen.
Hinweis: Bei der Integration kann eine Substitution $u = \rho^2$ hilfreich sein. Weiter ist das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) \quad \text{für } a < 0, b^2 - 4ac > 0$$

gegeben.

Aus der Energieerhaltung folgt, dass wir die Energie aus den Anfangsbedingungen bestimmen können und die Bewegungsgleichung mit E als konstanten Parameter erhalten über

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho)$$

und damit

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{eff}}(\rho)]}.$$

Wir lösen die Bewegungsgleichung durch Trennung der Variablen

$$dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{eff}}(\rho)]}} \Rightarrow t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - \frac{k}{2}\rho'^2 - \frac{L^2}{2m\rho'^2}]}}$$

Das verbliebene Integral können wir durch die Substitution $u = \rho^2$ auf das gegebene Integral zurückführen und lösen

$$\begin{aligned}\int \frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - \frac{k}{2}\rho'^2 - \frac{L^2}{2m\rho'^2}]}} &\stackrel{du=2\rho'd\rho'}{=} \int \frac{du}{2\sqrt{u}\sqrt{\frac{2}{m}[E - \frac{k}{2}u - \frac{L^2}{2mu}]}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{m}}} \int \frac{du}{\sqrt{-\frac{k}{2}u^2 + Eu - \frac{L^2}{2m}}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{-1}{\sqrt{\frac{k}{2}}} \arcsin\left(\frac{-2\frac{k}{2}u + E}{\sqrt{E^2 - 4\frac{k}{2}\frac{L^2}{2m}}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\frac{E - k\rho^2}{\sqrt{E^2 - \frac{k}{m}L^2}}\right)\end{aligned}$$

und erhalten (mit $t_0 = 0$)

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\frac{E - k\rho^2}{\sqrt{E^2 - \frac{k}{m}L^2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\frac{E - k\rho_0^2}{\sqrt{E^2 - \frac{k}{m}L^2}}\right).$$

Die Bahnkurve erhalten wir nun durch Invertierung dieser Gleichung, wobei wir den konstanten Term auf der rechten Seite durch C abkürzen:

$$\arcsin\left(\frac{E - k\rho^2}{\sqrt{E^2 - \frac{k}{m}L^2}}\right) = 2\sqrt{\frac{k}{m}}(C - t) \Rightarrow E - k\rho^2 = \sqrt{E^2 - \frac{k}{m}L^2} \sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}(C - t)\right)$$

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{E}{k} + \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{km}} \sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}(t - C)\right)}$$

- (f) [3 Punkte] Lösen Sie analog die Bewegungsgleichung für $\phi(\rho)$ und bestimmen Sie darüber $\rho(\phi)$.

Hinweis: Hier erweist sich die Substitution $u = 1/\rho^2$ als zweckmäßig.

$$d\phi = \frac{L}{m} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{k}{2}\rho^2 - \frac{L^2}{2m\rho'^2}\right]}} \Rightarrow \phi(\rho) - \phi(\rho_0) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^2 \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{k}{2}\rho'^2 - \frac{L^2}{2m\rho'^4}\right]}}$$

Das verbliebene Integral lösen wir nun durch die Substitution $u = 1/\rho^2$ (womit gilt $du = -2/\rho^3 d\rho$)

$$\begin{aligned} \int \frac{d\rho'}{\rho'^2 \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{k}{2}\rho'^2 - \frac{L^2}{2m\rho'^4}\right]}} &= \int \frac{d\rho'}{\rho'^3 \sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{E}{\rho'^2} - \frac{k}{2} - \frac{L^2}{2m\rho'^4}\right]}} = \int \frac{-du}{2\sqrt{\frac{2}{m}\left[Eu - \frac{k}{2} - \frac{L^2}{2m}u^2\right]}} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{-1}{\sqrt{\frac{L^2}{2m}}} \arcsin\left(\frac{-2\frac{L^2}{2m}\frac{1}{\rho^2} + E}{\sqrt{E^2 - 4\frac{L^2}{2m}\frac{k}{2}}}\right) = \frac{m}{2L} \arcsin\left(\frac{\rho^2 E - \frac{L^2}{m}}{\rho^2 \sqrt{E^2 - L^2 \frac{k}{m}}}\right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\phi(\rho) - \tilde{\phi}_0 = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\rho^2 E - \frac{L^2}{m}}{\rho^2 \sqrt{E^2 - L^2 \frac{k}{m}}}\right)$$

wobei alle konstanten Terme wieder in $\tilde{\phi}_0$ zusammengefasst sind und sich aus den Anfangsbedingungen ergeben. Durch Invertierung erhält man schliesslich

$$\rho(\phi) = \frac{L}{\sqrt{Em}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{E^2} \frac{k}{m}} \sin(2[\phi - \tilde{\phi}_0])}}.$$

3. Kegelschnitte

4 Punkte

In Polarkoordinaten sind Kegelschnitte durch die Gleichung

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \phi} \quad (1)$$

gegeben. In Abhängigkeit der Exzentrizität ϵ werden hierdurch verschiedene Kurvenformen beschrieben:

- (a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass für $0 \leq \epsilon < 1$ durch Gl.(1) eine Ellipse der Form

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

parametrisiert wird. Finden Sie den Zusammenhang zwischen den Parametern a, b also den Halbachsen der Ellipse und ϵ, k . Wo liegt der Mittelpunkt der Ellipse?

Hinweis: In der Polardarstellung (1) liegt der Ursprung in einem Brennpunkt, also nicht in der Mitte der Ellipse

Ohne viele Worte:

$$\begin{aligned} r &= \frac{k}{1 + \epsilon \cos \phi} = \frac{k}{1 + \epsilon \frac{x}{r}} \Rightarrow r + \epsilon x = k \\ r^2 &= x^2 + y^2 = (k - \epsilon x)^2 = k^2 - 2k\epsilon x + \epsilon^2 x^2 \\ x^2(1 - \epsilon^2) + k2\epsilon x + y^2 &= k^2 \\ x^2 + \frac{2k\epsilon}{1 - \epsilon^2}x + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} &= \frac{k^2}{1 - \epsilon^2} \end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{k\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 - \left(\frac{k\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} &= \frac{k^2}{1 - \epsilon^2} \\ \left(x + \frac{k\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} &= \frac{k^2}{(1 - \epsilon^2)^2} \\ \frac{(x + x_0)^2}{k^2/(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{y^2}{k^2/(1 - \epsilon^2)} &= 1 \end{aligned}$$

ergibt also

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit} \quad x' = x + \frac{k\epsilon}{1 - \epsilon^2} \quad \text{und} \quad a = \frac{k}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{k}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

Die Mitte ist um $x_0 = \frac{k\epsilon}{1 - \epsilon^2} = a\epsilon$ verschoben, liegt also bei $M = (-a\epsilon, 0)$

- (b) [1 Punkt] Zeigen Sie analog, dass für $\epsilon > 1$ durch Gl.(1) eine Hyperbel der Form

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

dargestellt wird. Finden Sie wieder Zusammenhang zwischen den Parametern a, b und ϵ, k . Wo liegt der Mittelpunkt der Hyperbel?

Rechnung analog nur

$$\begin{aligned} \frac{(x + x_0)^2}{k^2/(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{y^2}{k^2/(1 - \epsilon^2)} &= 1 \\ \frac{(x + x_0)^2}{k^2/(1 - \epsilon^2)^2} - \frac{y^2}{k^2/(\epsilon^2 - 1)} &= 1 \end{aligned}$$

ergibt also

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit} \quad x' = x + \frac{k\epsilon}{1 - \epsilon^2} \quad \text{und} \quad a = \frac{k}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{k}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}.$$

Die Mitte liegt also wieder bei $M = (-a\epsilon, 0)$.