Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Blatt 10
Abgabe: 10.01.2017

Beachten Sie bitte, dieses Übungsblatt ist dahingehend speziell, als dass es den Charakter einer Probeklausur besitzen soll. Probeklausur in dem Sinne, dass die Aufgaben der Art, des individuellen Umfangs und dem Schwierigkeitsgrad dem entsprechen, wie Sie ihn später bei den Aufgaben in der Klausur begegnen werden.
Beachten Sie bitte auch, dass die Klausur ohne Hilfsmittel geschrieben wird. Die Aufgaben werden Ihnen daher im Vergleich zu früheren Aufgaben in den Tutorien als einfach erscheinen. Täuschen Sie sich hier bitte nicht!

Zur eigenen Wissenskontrolle empfielt sich somit, dieses Blatt (zuerst) *alleine* und *ohne Hilfsmittel* zu bearbeiten.

Hier noch ein Beispiel eines typischen Deckblatts einer entsprechenden Klausur:

Name:		**Matrikelnr.:**	
Vorname:		**Tutor / Übungsgr.:**	
Studiengang:		**Prüfungsordnung:**	

Wichtige Hinweise:

- **Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.**
- **Dieses Blatt mit abgeben.**
- **Bitte Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt schreiben.**
- **Bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden.**
- **Bitte weder rote Stifte noch Bleistifte verwenden.**
- **Smartphones und andere technische Geräte sind während der Klausur abzuschalten und in Rucksack oder Jacke zu verstauen.**
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
von	10	10	10	10	10	10	100 %= 60

1. Warm-up [10 Punkte]

(a) [3 Punkte] Gegeben sei der Ortsvektor $\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$ mit $|\mathbf{r}| = r$. Berechnen Sie folgende Gradienten:

(i) ∇r (ii) $\nabla f(r)$ (iii) $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$, wobei $\mathbf{a}$ ein ortsunabhängiger Vektor ist.

(b) [1 Punkt] Gegeben sei ein Potential $U(\mathbf{r}, t)$. Geben Sie die Bewegungsgleichung für einen Massepunkt in diesem Potential an.

(c) [2 Punkte] Gegeben sei ein Potential $U(\mathbf{r}, t)$. Leiten Sie, unter Verwendung der Bewegungsgleichung, die Energiebilanz $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ des Massepunkts in diesem Potential her.

(d) [1 Punkt] Welche Bedingung muss ein Potential $U(\mathbf{r}, t)$ erfüllen, damit Energieerhaltung gilt?

(e) [1 Punkt] Wie ist der Drehimpuls $\mathbf{L}$ definiert?

(f) [2 Punkte] Zeigen Sie, unter Verwendung der Bewegungsgleichung: In einem Zentralpotential $U(r)$ ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

2. Bahnkurve in 2D [10 Punkte]

Ein Massepunkt der Masse m bewegt sich in der xy-Ebene auf der Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \rho_0 \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \omega t \\ \rho_0 \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \omega t \end{pmatrix}$$

mit konstanten Parametern ρ_0, α, ω.

(a) [2 Punkte] Skizzieren Sie die Bahnkurve und unterscheiden Sie explizit die beiden Fälle $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$.

(b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ des Massepunkts.

(c) [3 Punkte] Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ und den Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(t)$ der Bahnkurve. Berechnen Sie dabei den Krümmungsradius $R(t)$.

(d) [3 Punkte] Berechnen Sie die ab $t_0 = 0$ zurückgelegte Strecke.
Im Fall $\alpha < 0$, welche Strecke wird im Grenzfall $t \to \infty$ zurückgelegt?

3. Bewegungsgleichung in einer Dimension, Trennung der Variablen [10 Punkte]

Die eindimensionale Bewegungsgleichung für ein relativistisches Teilchen in einem konstanten Kraftfeld lautet

$$M(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F \cdot t\,, \qquad M(t) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}}$$

wobei $F > 0$ die konstante Kraft, m eine konstante Masse und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

(a) [2 Punkte] Setzen Sie den Ausdruck für $M(t)$ in die Bewegungsgleichung ein. Lösen Sie danach die Bewegungsgleichung nach $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ auf.

(b) [3 Punkte] Geben Sie das asymptotische Verhalten von $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ für $t \to \infty$ und für $t \to 0$ an, indem Sie im Ergebnis von (a) die rechte Seite für große und kleine t betrachten.

(c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung von $x(t)$ der Bewegungsgleichung mit Hilfe des Ergebnisses von (a). Die Anfangsbedingung laute $x(t = 0) = 0$.
Hinweis: Beim Berechnen des auftretendes Integrals hilft eine Substitution der Art $\tau = c_1 + c_2 t^2$ *weiter.*

(d) [2 Punkte] Skizzieren Sie die Bahnkurve $x(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit unter Beachtung der asymptotischen Regionen.

4. Zentrifugal- und Corioliskraft [10 Punkte]

Der Ort $\mathbf{r}$ eines Fahrzeugs auf der Eroberfläche wird durch die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ bestimmt. Das Fahrzeug fahre mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}} = v_s\,\mathbf{e}_\theta + v_o\,\mathbf{e}_\phi$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_z$.

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbf{e}_z = \cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta\,.$$

(b) [3 Punkte] Berechnen Sie die Corioliskraft

$$\mathbf{F}_\mathrm{C} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}\,,$$

die durch die Erdrotation auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Kugelkoordinaten an.

(c) [3 Punkte] Berechnen Sie die Zentrifugalkraft

$$\mathbf{F}_Z = -m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]\,,$$

die durch die Erdrotation auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie das Ergebnis wieder in Kugelkoordinaten an.

(d) [2 Punkte] Mit welcher Geschwindigkeit und in welche Richtung muss das Fahrzeug fahren, damit sich die beiden Kräfte gerade aufheben? Wo auf der Erde gelingt dies am ehesten?

(e) [1 Punkt] Intuitiv hätte man vielleicht erwartet, dass die beiden Kräfte sich aufheben wenn die Geschwindigkeit gerade die Erdrotation kompensiert. Warum ist diese Intuition falsch?

5. Konservatives Kraftfeld, Potential [10 Punkte]

Gegeben ist das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ez \end{pmatrix}$$

(a) [2 Punkte] Welche Bedingung müssen die Konstanten $a, b, c, d, e \neq 0$ erfüllen, damit $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ein konservatives Kraftfeld ist?

(b) [3 Punkte] Bestimmen Sie das Potential $U(\mathbf{r})$. Berechnen Sie zur Kontrolle das aus dem gefundenen Potential resultierene Kraftfeld.

(c) [4 Punkte] Bestimmen Sie, durch explizite Berechnung der Wegintegrale, die an einem Massepunkt verrichtete Arbeit entlang der Wege:

(i) C_1: Auf direktem Weg von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ nach $(1, 0, 1)$.

(ii) C_2: In einem Halbkreis in der xy-Ebene von $(1, 0, 1)$ über $(0, -1, 1)$ nach $(-1, 0, 1)$.

(iii) C_3: Auf direktem Weg von $(-1, 0, 1)$ nach $(0, 0, 0)$.

(d) [1 Punkt] Nutzen Sie nun, dass das Kraftfeld konservativ ist und überprüfen Sie Ihre Ergebniss aus dem Aufgabenteil c).

6. Bewegung im eindimensionalen Potential [10 Punkte]

Ein Teilchen der Masse m mit der Energie E bewegt sich im Kraftfeld des Morse-Potentials

$$U(x) = U_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}\right)^2 \,, \text{ mit } \alpha > 0.$$

(a) [1 Punkt] Skizzieren Sie das Potential.

(b) [3 Punkte] Betrachten Sie zunächst die Bewegung anhand der Skizze:

(i) Für welche Energie bleibt das Teilchen in Ruhe und wo befindet sich diese Ruhelage x_0?

(ii) Für welche Energien bewegt sich das Teilchen in einem begrenzten Bereich?

(iii) Für welche Energien kann es sich auch bis ins Unendliche bewegen?

(c) [2 Punkte] Bestimmen Sie im Fall der gebundenen Bewegung die beiden Umkehrpunkte $x_{1,2}$

(d) [2 Punkte] Nutzen Sie die Energieerhaltung, um die Bewegungsgleichung des Teilchens zu lösen. Geben Sie dabei die *formale* Lösung $t(x)$ an.
Auftretende Integrale müssen nicht explizit berechnet werden.

(e) [2 Punkte] Betrachten Sie nun ein Teilchen mit einer kleinen aber immer noch positiven Energie. Durch welches Potential wird der Bereich um den Ruhepunkt x_0 angenähert? Welchem anderen physikalischen System entspricht dies?

Kleine Formelsammlung

Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y \\
\mathbf{e}_\phi &= -\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y \\
\mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \dot{z}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_z \\
\mathbf{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_x - \sin\theta\,\mathbf{e}_z \\
\mathbf{e}_\phi &= -\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi$$