

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Lösung - Blatt 10

DR. ANDREAS POENICKE, MSC. KARIM MNASRI

Abgabe: 10.01.2017**1. Warm-up**

[10 Punkte]

- (a) [3 Punkte] Gegeben sei der Ortsvektor $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ mit $|\mathbf{r}| = r$. Berechnen Sie folgende Gradienten:

(i) ∇r (ii) $\nabla f(r)$ (iii) $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$, wobei $\mathbf{a}$ ein ortsunabhängiger Vektor ist.

Lösung:

$$(i) \quad \nabla r = \nabla \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{r} \mathbf{e}_x + \frac{y}{r} \mathbf{e}_y + \frac{z}{r} \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$(ii) \quad \nabla f(r) = f'(r) \nabla r = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$(iii) \quad \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \nabla(a_x x + a_y y + a_z z) = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z = \mathbf{a}$$

- (b) [1 Punkt] Gegeben sei ein Potential $U(\mathbf{r}, t)$. Geben Sie die Bewegungsgleichung für einen Massepunkt in diesem Potential an.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$$

- (c) [2 Punkte] Gegeben sei ein Potential $U(\mathbf{r}, t)$. Leiten Sie, unter Verwendung der Bewegungsgleichung, die Energiebilanz $\frac{dE}{dt}$ des Massepunkts in diesem Potential her.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} [T + U(\mathbf{r}, t)] = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) + \nabla U(\mathbf{r}, t) \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= m\ddot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} + \nabla U(\mathbf{r}, t) \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = [-\nabla U(\mathbf{r}, t) + \nabla U(\mathbf{r}, t)] \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

- (d) [1 Punkt] Welche Bedingung muss ein Potential $U(\mathbf{r}, t)$ erfüllen, damit Energieerhaltung gilt?

Das Potential muss zeitunabhängig sein, d.h. $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})$ bzw. $\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t) = 0$.

- (e) [1 Punkt] Wie ist der Drehimpuls $\mathbf{L}$ definiert?

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

- (f) [2 Punkte] Zeigen Sie, unter Verwendung der Bewegungsgleichung: In einem Zentralpotential $U(r)$ ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times [-\nabla U(r)] = \mathbf{r} \times \left[-U'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = -\frac{U'(r)}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0$$

2. Bahnkurve in 2D

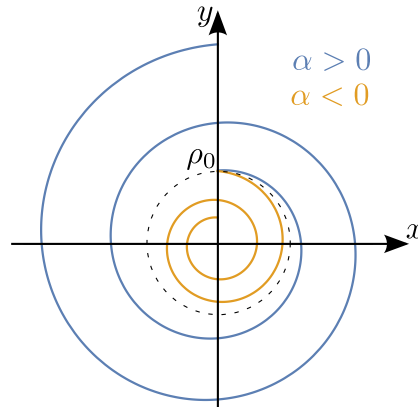
[10 Punkte]

Ein Massepunkt der Masse m bewegt sich in der xy -Ebene auf der Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \rho_0 e^{\alpha t} \sin \omega t \\ \rho_0 e^{\alpha t} \cos \omega t \end{pmatrix}$$

mit konstanten Parametern ρ_0, α, ω .

- (a) [2 Punkte] Skizzieren Sie die Bahnkurve und unterscheiden Sie explizit die beiden Fälle $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$. Die Bahnkurve beschreibt eine 2D Spirale mit dem zeitabhängigen Radius $\rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t}$ und einer Kreisfrequenz ω . Für $\alpha < 0$ (bzw. $\alpha > 0$) nimmt der Radius mit exponentiell mit der Zeit ab (bzw. zu).



- (b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ des Massepunkts. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung lassen sich direkt durch differenzieren des Ortsvektors nach der Zeit berechnen:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \rho_0 e^{\alpha t} (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \\ \rho_0 e^{\alpha t} (\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \rho_0 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \omega^2) \sin \omega t + 2\alpha\omega \cos \omega t \\ (\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t - 2\alpha\omega \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

- (c) [3 Punkte] Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ und den Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(t)$ der Bahnkurve. Berechnen Sie dabei den Krümmungsradius $R(t)$.

Der Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ ist der normierte Geschwindigkeitsvektor. Dieser lautet

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \\ \frac{\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \end{pmatrix}.$$

Der Normaleneinheitsvektor ist definiert durch $\mathbf{n}(t) = \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} \right| = \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} \frac{R(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$. Mit dem obigen Ergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{R(t)\omega e^{-\alpha t}(\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t)}{\rho_0(\alpha^2 + \omega^2)} \\ -\frac{R(t)\omega e^{-\alpha t}(\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t)}{\rho_0(\alpha^2 + \omega^2)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{R(t)\omega e^{-\alpha t}}{\rho_0(\alpha^2 + \omega^2)} \begin{pmatrix} \alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t \\ -\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck noch abzuschließen benötigen wir noch den Krümmungsradius. Dieser lässt sich durch die Norm des Normaleneinheitsvektors berechnen. Es gilt nämlich $\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{n}(t) = 1$. Somit bekommen wir

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{R(t)\omega e^{-\alpha t}}{\rho_0(\alpha^2 + \omega^2)} \sqrt{(\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t)^2 + (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t)^2} \\ &= \frac{R(t)\omega e^{-\alpha t}}{\rho_0(\alpha^2 + \omega^2)} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Nach $R(t)$ aufgelöst liefert dies

$$R(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \rho_0 e^{\alpha t} = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \rho_0 e^{\alpha t}.$$

Somit lautet der Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \begin{pmatrix} \alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t \\ -\omega \cos \omega t - \alpha \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

- (d) [3 Punkte] Berechnen Sie die ab $t_0 = 0$ zurückgelegte Strecke.
Im Fall $\alpha < 0$, welche Strecke wird im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ zurückgelegt?

Die ab $t_0 = 0$ zurückgelegte Strecke, bzw. die Bogenlänge ist definiert durch

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(t')| dt',$$

mit $|\mathbf{v}(t')| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \rho_0 e^{\alpha t'}$. Durch Einsetzen des Ausdrucks für $|\mathbf{v}(t')|$ in die Bogenlänge ergibt sich

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \rho_0 e^{\alpha t'} dt' = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \rho_0 \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t'} \right]_0^t \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \frac{\rho_0}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \end{aligned}$$

Im Fall $\alpha < 0$, ist die im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ zurückgelegte Strecke

$$s = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \rho_0.$$

3. Bewegungsgleichung in einer Dimension, Trennung der Variablen [10 Punkte]

Die eindimensionale Bewegungsgleichung für ein relativistisches Teilchen in einem konstanten Kraftfeld lautet

$$M(t) \frac{dx}{dt} = F \cdot t, \quad M(t) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}$$

wobei $F > 0$ die konstante Kraft, m eine konstante Masse und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

- (a) [2 Punkte] Setzen Sie den Ausdruck für $M(t)$ in die Bewegungsgleichung ein. Lösen Sie danach die Bewegungsgleichung nach $\frac{dx}{dt}$ auf.

Durch Einsetzen des Ausdrucks für $M(t)$ in die Bewegungsgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} \frac{dx}{dt} &= Ft \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2}{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F^2 t^2 \\ \Leftrightarrow m^2 c^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= F^2 t^2 \left[c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right] \quad \Leftrightarrow (m^2 c^2 + F^2 t^2) = F^2 t^2 c^2. \end{aligned}$$

Da wir den Fall $F > 0$ und Zeiten $t > 0$ betrachten, folgt aus der Bewegungsgleichung $\frac{dx}{dt} > 0$; beim Ziehen der Wurzel behalten wir deshalb nur die positive Lösung:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{F^2 t^2 c^2}{m^2 c^2 + F^2 t^2}} = \frac{Ft}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}$$

- (b) [3 Punkte] Geben Sie das asymptotische Verhalten von $v(t) = \frac{dx}{dt}$ für $t \rightarrow \infty$ und für $t \rightarrow 0$ an, indem Sie im Ergebnis von (a) die rechte Seite für große und kleine t betrachten.

Für kleine Zeiten t ($t \rightarrow 0$) gilt $\frac{Ft}{mc} \ll 1$. Wir können also den Summanden $(\frac{Ft}{mc})$ unter der Wurzel vernachlässigen. Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{Ft}{m}.$$

Für große Zeiten t ($t \rightarrow \infty$) gilt $\frac{Ft}{mc} \gg 1$. In diesem Fall können wir folgende Näherung vornehmen: $\sqrt{1 + (\frac{Ft}{mc})^2} \approx \frac{Ft}{mc}$. Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{Ft}{m} \frac{mc}{Ft} = c.$$

- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung von $x(t)$ der Bewegungsgleichung mit Hilfe des Ergebnisses von (a). Die Anfangsbedingung laute $x(t=0) = 0$.

Hinweis: Beim Berechnen des auftretendes Integrals hilft eine Substitution der Art $\tau = c_1 + c_2 t^2$ weiter.

Wir berechnen $x(t)$, indem wir die Geschwindigkeit nach der Zeit integrieren:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Ft}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{Ft}{mc})^2}} \Rightarrow \int_{x_0=0}^x dx' = \int_0^t \frac{Ft'}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{Ft'}{mc})^2}} dt'.$$

Wir substituieren nun $\tau = 1 + (\frac{F}{mc})^2 t'^2$, $d\tau = \frac{2F^2}{m^2 c^2} t' dt'$ und erhalten

$$x(t) = \int_1^{1+(\frac{Ft}{mc})^2} \frac{mc^2}{F} \frac{1}{2\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{mc^2}{F} [\sqrt{\tau}]_1^{1+(\frac{Ft}{mc})^2} = \frac{mc^2}{F} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1 \right]$$

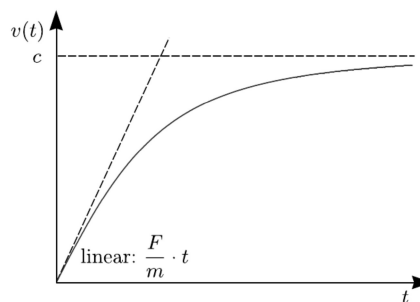
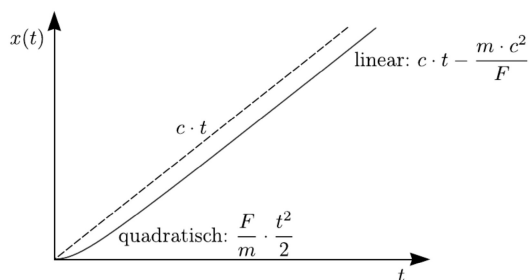
- (d) [2 Punkte] Skizzieren Sie die Bahnkurve $x(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit unter Beachtung der asymptotischen Regionen.

Für kleine Zeiten gilt $(\frac{Ft}{mc})^2 \ll 1$, und wir können die Näherung $\sqrt{1 + (\frac{Ft}{mc})^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2$ vornehmen. Damit ergibt sich

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{F} \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2 = \frac{F}{2m} t^2.$$

Für große Zeiten gilt $(\frac{Ft}{mc})^2 \gg 1$. In diesem Fall nähern wir $\sqrt{1 + (\frac{Ft}{mc})^2} \approx \frac{Ft}{mc}$. Damit ergibt sich

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{F} \left(\frac{Ft}{mc} - 1\right) = ct - \frac{mc^2}{F}.$$



4. Zentrifugal- und Corioliskraft

[10 Punkte]

Der Ort $\mathbf{r}$ eines Fahrzeugs auf der Erdoberfläche wird durch die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ bestimmt. Das Fahrzeug fahre mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}} = v_s \mathbf{e}_\theta + v_o \mathbf{e}_\phi$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$.

- (a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta .$$

$$\begin{aligned} \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos^2 \theta \mathbf{e}_z \\ &\quad - \sin \theta \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x - \sin \theta \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \sin^2 \theta \mathbf{e}_z \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

- (b) [3 Punkte] Berechnen Sie die Corioliskraft

$$\mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} ,$$

die durch die Erdrotation auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Kugelkoordinaten an.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= -2m\omega(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \times (v_s \mathbf{e}_\theta + v_o \mathbf{e}_\phi) \\ &= -2m\omega v_s \cos \theta \mathbf{e}_\phi + 2m\omega v_o (\cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \mathbf{e}_r) \end{aligned}$$

- (c) [3 Punkte] Berechnen Sie die Zentrifugalkraft

$$\mathbf{F}_Z = -m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] ,$$

die durch die Erdrotation auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie das Ergebnis wieder in Kugelkoordinaten an.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_Z &= -m\omega(\boldsymbol{\omega} \times [(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \times (r \mathbf{e}_r)]) = m\omega r \sin \theta (\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_r]) \\ &= -m\omega^2 r \sin \theta ([\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta] \times \mathbf{e}_\phi) = m\omega^2 r \sin \theta (\cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \mathbf{e}_r) \end{aligned}$$

- (d) [2 Punkte] Mit welcher Geschwindigkeit und in welche Richtung muss das Fahrzeug fahren, damit sich die beiden Kräfte gerade aufheben. Wo auf der Erde gelingt dies am ehesten?

Damit sich die Kräfte gerade aufheben muss gelten $v_s = 0$ und $v_o = -\frac{1}{2}\omega r \sin \theta$. Das Fahrzeug muss also nach Westen fahren. Am besten gelingt dies in der Nähe der Pole, da hier gilt $\sin \theta \ll 1$.

- (e) [1 Punkt] Intuitiv hätte man vielleicht erwartet, dass die beiden Kräfte sich aufheben wenn die Geschwindigkeit gerade die Erdrotation kompensiert. Warum ist diese Intuition falsch?

Das Fahrzeug selbst führt nun im Ruhesystem der Erde auch eine Rotationsbewegung mit $\boldsymbol{\omega}' = \frac{v_o}{r \sin \theta} \mathbf{e}_z$ aus. Im Ruhesystem des Fahrzeugs gibt es damit einen weiteren Beitrag zur Zentrifugalkraft $\mathbf{F}_Z(\omega') = m\omega'^2 r \sin \theta (\cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \mathbf{e}_r)$.

Für $\boldsymbol{\omega}' = -\boldsymbol{\omega}$ gilt $\mathbf{F}_C + \mathbf{F}_Z(\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{F}_Z(\boldsymbol{\omega}') = \mathbf{F}_Z(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') = 0$.

5. Konservatives Kraftfeld, Potential

[10 Punkte]

Gegeben ist das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ez \end{pmatrix}$$

- (a) [2 Punkte] Welche Bedingung müssen die Konstanten $a, b, c, d, e \neq 0$ erfüllen, damit $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ein konservatives Kraftfeld ist?

Wir betrachten die Bedingung $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $c = b$ ist das Kraftfeld konservativ.

- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie das Potential $U(\mathbf{r})$. Berechnen Sie zur Kontrolle das aus dem gefundenen Potential resultierende Kraftfeld.

Wir Berechnen das Potential $U(\mathbf{r})$ über das Wegintegral mit Hilfe der Parametrisierung $\mathbf{r}(t) = (xt, yt, zt)$ mit $t = [0, 1]$:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) - U(0, 0, 0) &= - \int_0^1 \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + dy \\ ez \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \\ &= - [(ax + by)x + (bx + dy)y + ez^2] \int_0^1 dt \\ &= - \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + dy^2 + ez^2) \end{aligned}$$

Test:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + dy \\ ez \end{pmatrix}.$$

- (c) [4 Punkte] Bestimmen Sie, durch explizite Berechnung der Wegintegrale, die an einem Massepunkt verrichtete Arbeit entlang der Wege:

- (i) C_1 : Auf direktem Weg von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ nach $(1, 0, 1)$.

Mit der Parametrisierung $\mathbf{r}(t) = (t, 0, t)$ mit $t = [0, 1]$:

$$W_1 = \int_0^1 \begin{pmatrix} at \\ bt \\ et \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = (a + e) \int_0^1 t dt = \frac{a + e}{2}$$

- (ii) C_2 : In einem Halbkreis in der xy -Ebene von $(1, 0, 1)$ über $(0, -1, 1)$ nach $(-1, 0, 1)$.

Mit der Parametrisierung $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), -\sin(t), 1)$ mit $t = [0, \pi]$:

$$W_2 = \int_0^\pi \begin{pmatrix} a \cos(t) - b \sin(t) \\ b \cos(t) - d \sin(t) \\ e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad (1)$$

$$= - \int_0^\pi (a \sin t \cos t - b \sin^2 t + b \cos^2 t - d \sin t \cos t) dt \quad (2)$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(a - d) \sin t \cos t + b(\cos^2 t - \sin^2 t)] dt \quad (3)$$

$$- \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi [(a - d) \cos t (-\sin t) + b(\sin^2 t - \cos^2 t)] dt = 0 \quad (4)$$

- (iii) C_3 : Auf direktem Weg von $(-1, 0, 1)$ nach $(0, 0, 0)$.

Mit der Parametrisierung $\mathbf{r}(t) = (-t, 0, t)$ mit $t = [1, 0]$:

$$W_3 = \int_1^0 \begin{pmatrix} -at \\ bt \\ et \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -(a + e) \int_0^1 t dt = -\frac{a + e}{2}$$

- (d) [1 Punkt] Nutzen Sie nun, dass das Kraftfeld konservativ ist und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil c).

$$W_1 = -U(1, 0, 1) + U(0, 0, 0) = \frac{1}{2}(a + e) - 0 = \frac{1}{2}(a + e)$$

$$W_2 = -U(-1, 0, 1) + U(1, 0, 1) = \frac{1}{2}(a + e) - \frac{1}{2}(a + e) = 0$$

$$W_3 = -U(0, 0, 0) + U(-1, 0, 1) = 0 - \frac{1}{2}(a + e) = -\frac{1}{2}(a + e)$$

6. Bewegung im eindimensionalen Potential

[10 Punkte]

Ein Teilchen der Masse m mit der Energie E bewegt sich im Kraftfeld des Morse-Potentials

$$U(x) = U_0 (1 - e^{-\alpha x})^2, \text{ mit } \alpha > 0.$$

(a) [1 Punkt] Skizzieren Sie das Potential.

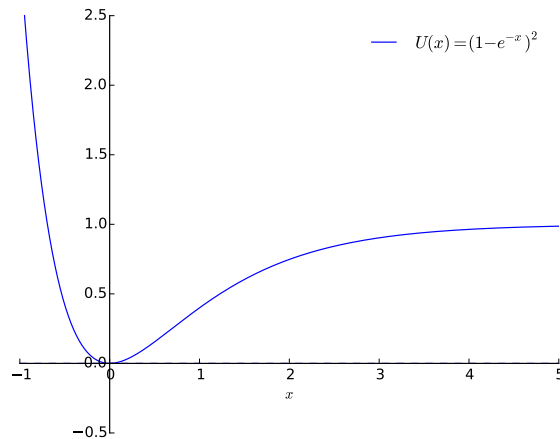


Abbildung 1: Das Morse-Potential für $U_0 = 1$ und $\alpha = 1$.

(b) [3 Punkte] Betrachten Sie zunächst die Bewegung anhand der Skizze:

- (i) Für welche Energie bleibt das Teilchen in Ruhe und wo befindet sich diese Ruhelage x_0 ?

Das Teilchen bleibt in Ruhe wenn seine Energie dem Minimum des Potentials entspricht. $U_{\min}(x_0) = 0$ und $x_0 = 0$ sieht man direkt oder berechnet

$$\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_0} = 2\alpha e^{-\alpha x_0} (1 - e^{-\alpha x_0}) = 0 \rightarrow x_0 = 0, \quad U_{\min} = U(0) = 0.$$

- (ii) Für welche Energien bewegt sich das Teilchen in einem begrenzten Bereich?
Für Energien $0 \leq E < U_0$ bewegt sich das Teilchen in einem begrenzten Bereich.
(iii) Für welche Energien kann es sich auch bis ins Unendliche bewegen?

Für Energien $E > U_0$ kann sich das Teilchen bis ins Unendliche bewegen.

(c) [2 Punkte] Bestimmen Sie im Fall der gebundenen Bewegung die Umkehrpunkte $x_{1,2}$. Die Umkehrpunkte ergeben sich aus der Bedingung $E = U(x_{1,2})$ und damit

$$E = U_0 (1 - e^{-\alpha x_{1,2}})^2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 \pm \sqrt{\frac{E}{U_0}} \right)$$

(d) [2 Punkte] Nutzen Sie die Energieerhaltung, um die Bewegungsgleichung des Teilchens zu lösen. Geben Sie dabei die *formale* Lösung $t(x)$ an. **Auftretende Integrale müssen nicht explizit berechnet werden.**

Die Energie ergibt sich aus kinetischer Energie und potentieller Energie

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x).$$

Man erhält die Bewegungsgleichung durch Auflösen nach $\dot{x}$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}$$

Trennung der Variablen und Integration

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}}.$$

- (e) [2 Punkte] Betrachten Sie nun ein Teilchen mit einer kleinen aber immer noch positiven Energie. Durch welches Potential wird der Bereich um den Ruhepunkt x_0 angenähert? Welchem anderen physikalischen System entspricht dies?

Das Potential $U(x)$ kann für kleine Energie durch entwickeln um $x_0 = 0$ angenähert werden als

$$U(x) \approx U_0 [1 - (1 - \alpha x)^2] = U_0 \alpha^2 x^2.$$

Für kleine Energien entspricht das System also einem harmonischen Oszillator.

Kleine Formelsammlung

Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

Kugelkoordinaten

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi$$