Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Blatt 11
Abgabe: 17.01.2017

1. Runge-Lenz-Vektor 5 Punkte

Das die Lösungen des Kepler-Problems geschlossene Umlaufbahnen sind ist eine Besonderheit des Gravitationspotentials. Schon kleine Abweichungen führen zu Periheldrehungen. Diese Besonderheit des $1/r$-Potentials zeigt sich durch eine weitere (weniger offensichtliche) Erhaltungsgröße. Für das Zentralpotential

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}$$

ist der Runge-Lenz-Vektor definiert als

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha\frac{\mathbf{r}}{r}\,.$$

Wie wir sehen werden, sind die geschlossenen Bahnkurven eine direkte Folge der Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors:

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor $\mathbf{A}$ in der Bewegungsebene liegt.

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass wenn die Planetenbahnen minimalen bzw. maximalen Abstand zur Sonne haben, $\mathbf{A}$ parallel zu $\mathbf{r}$ ist. Er zeigt damit in Richtung des Perihels (oder Aphels).
Hinweis: Für Extrema von r hat auch $r^2 = \mathbf{r}^2$ ein Extremum.

(c) [2 Punkte] Nutzen Sie die Bewegungsgleichung um zu zeigen, dass $\mathbf{A}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Somit zeigt der Runge-Lenz-Vektor in Richtung der großen Halbachse und ist zeitlich konstant. Woraus direkt folgt, dass die große Halbachse sich nicht zeitlich ändert, also keine Periheldrehung erfolgt.

2. Komplexe Exponentialfunktion 3 Punkte

(a) [2 Punkte] Ausgehend von der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion, zeigen Sie, dass gilt

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,.$$

Und damit die Euler-Identität $e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$ erfüllt ist.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass

$$\cos\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}\,.$$

3. Komplexe Zahlen, Eulersche Darstellung 4 Punkte

Berechnen Sie den folgenden Ausdruck und stellen Sie das Ergebnis sowohl in der Form $z = a + \mathrm{i}\,b$, als auch in der Eulerschen Darstellung $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ dar:

(a) [2 Punkte] $\dfrac{-1+5\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ (b) [2 Punkte] $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)^4$

4. Gewöhnliche Differentialgleichungen 4 Punkte

Bestimmen Sie die linear unabhängigen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen über den Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$

(a)	$\dot{x}(t) + 3x(t) = 0$	(b)	$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 3x(t) = 0$
(c)	$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$	(d)	$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = 0$

5. Wurf mit Reibung 4 Punkte

Der senkrechte Wurf eines Massenpunktes der Masse m im Schwerefeld der Erde sei durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$m\ddot{z}(t) = -mg - \gamma\dot{z}(t)\,, \qquad \gamma > 0\,, \tag{1}$$

wobei $\gamma\dot{z}$ den Einfluss der Stokes'schen Reibung beschreiben soll.

Bestimmen Sie die Bahnkurve des Massepunkts unter den Anfangsbedingungen $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = v_{z,0}$ in dem Sie die inhomogene Differentialgleichung (1) lösen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen Differentialgleichung.

(b) Finden Sie die Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie die freien Parameter aus den Anfangsbedingungen.

Verallgemeinern Sie die Lösung auf den schrägen Wurf mit Reibung. Die Differentialgleichung des schrägen Wurfs ist gegeben durch

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -mg\,\mathbf{e}_z - \gamma\dot{\mathbf{r}}(t)\,. \tag{2}$$

(d) Nutzen Sie die gefundene Lösung um Gl. (2) mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(0) = 0$ und $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 = v_0(\cos\alpha\,\mathbf{e}_x + \sin\alpha\,\mathbf{e}_z)$ zu lösen.