

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 11

DR. ANDREAS POENICKE, MSC. KARIM MNASRI

Abgabe: 17.01.2017

1. Runge-Lenz-Vektor

5 Punkte

Das die Lösungen des Kepler-Problems geschlossene Umlaufbahnen sind ist eine Besonderheit des Gravitationspotentials. Schon kleine Abweichungen führen zu Periheldrehungen. Diese Besonderheit des $1/r$ -Potentials zeigt sich durch eine weitere (weniger offensichtliche) Erhaltungsgröße. Für das Zentralpotential

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}$$

ist der Runge-Lenz-Vektor definiert als

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Wie wir sehen werden sind die geschlossenen Bahnkurven eine direkte Folge der Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors:

- (a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor $\mathbf{A}$ in der Bewegungsebene liegt.

Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ ist erhalten und steht senkrecht zur Bewegungsebene. Da gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - \frac{m^2 \alpha}{r} \mathbf{r}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0,$$

steht $\mathbf{A}$ wiederum senkrecht auf $\mathbf{L}$, liegt also in der Bewegungsebene.

- (b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass wenn die Planetenbahnen minimalen bzw. maximalen Abstand zur Sonne haben $\mathbf{A}$ parallel zu $\mathbf{r}$ ist. Er zeigt damit in Richtung des Perihels (oder Aphels).

Hinweis: Für Extrema von r hat auch $r^2 = \mathbf{r}^2$ ein Extremum.

Wenn $\mathbf{A}$ parallel zu $\mathbf{r}$ stehen soll muss gelten $\mathbf{A} \times \mathbf{r} = 0$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{r} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{r} - \frac{m\alpha}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = m\mathbf{L}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) - m\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{L})$$

Für die Extrema gilt $\frac{dr}{dt} = 0$ als auch $\frac{dr^2}{dt} = \frac{d\mathbf{r}^2}{dt} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ und damit $\mathbf{A} \times \mathbf{r} = 0$.

- (c) [2 Punkte] Nutzen Sie die Bewegungsgleichung um zu zeigen, dass $\mathbf{A}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Die zeitliche Änderung des Runge-Lenz-Vektors ist gegeben durch

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{L}} - m\alpha \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \mathbf{r} \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3} \right].$$

Es gilt Drehimpulserhaltung, also $\dot{\mathbf{L}} = 0$. Wir nutzen weiter die Bewegungsgleichung $\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ und erhalten so

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \frac{m\alpha}{r} \left[\dot{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^2} \right] = -\frac{m\alpha}{r^3} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] - \frac{m\alpha}{r} \left[\dot{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^2} \right] = 0.$$

Somit zeigt der Runge-Lenz-Vektor in Richtung der großen Halbachse und ist zeitlich konstant. Woraus direkt folgt, dass die große Halbachse sich nicht zeitlich ändert, also keine Periheldrehung erfolgt.

Bonusmaterial:

Wir haben gesehen, dass Erhaltungsgrößen bei der Lösung von Bewegungsgleichung hilfreich sein können. Dies gilt auch für den Runge-Lenz-Vektor:

Legen wir die x -Achse in Richtung von $\mathbf{A}$ so ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \phi$. Mit der Definition von $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - m\alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{L} - m\alpha r = L^2 - m\alpha r = Ar \cos \phi,$$

erhält man direkt

$$r = \frac{L^2}{m\alpha + A \cos \phi} = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \phi}.$$

Ohne Integration oder das Lösen von Differentialgleichungen.

2. Komplexe Exponentialfunktion

4 Punkte

- (a) [2 Punkte] Ausgehend von der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion, zeigen Sie, dass gilt

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Und damit die Euler-Identität $e^{i\pi} + 1 = 0$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(-1)^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

(Die Aufteilung der Reihe in zwei Reihen ist zulässig, da jede Reihe für sich konvergiert.)

Die Euler-Identität folgt direkt aus der Polardarstellung:

$$e^{i\pi} + 1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi) + 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

- (b) Zeigen Sie, dass

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Es gilt $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$, damit erhält man die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi. \end{aligned}$$

Löst man diese Gleichungen nach $\sin \varphi$ bzw. $\cos \varphi$ auf, erhält man

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \sin \varphi.$$

3. Komplexe Zahlen, Eulersche Darstellung

4 Punkte

Berechnen Sie den folgenden Ausdruck und stellen Sie das Ergebnis sowohl in der Form $z = a + ib$, als auch in der Eulerdarstellung $z = re^{i\varphi}$ dar:

(a) [2 Punkte] $\frac{-1 + 5i}{2 + 3i}$ (b) [2 Punkte] $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$

- (a) Wir multiplizieren Zähler und Nenner mit der komplex Konjugierten des Nenners und erhalten so

$$\frac{-1 + 5i}{2 + 3i} = \frac{(-1 + 5i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{13 + 13i}{4 + 9} = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

- (b) Bei höheren Potenzen empfiehlt es sich eigentlich immer zuerst in die Euler-Darstellung zu wechseln also mit $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \rightarrow \quad z = \cos \varphi + i \sin \varphi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \quad \rightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Damit ist

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = z^4 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Gewöhnliche Differentialgleichungen

4 Punkte

Bestimmen Sie die linear unabhängigen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen über den Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$

- (a) Für eine Differentialgleichung 1. Ordnung gibt es nur eine linear unabhängige Lösung. Wir lösen die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) + 3x(t) = 0$$

durch Einsetzen des Exponentialansatzes $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} = (\lambda + 3)e^{\lambda t} = 0$$

und erhalten so die charakteristische Gleichung

$$\lambda + 3 = 0$$

mit der Lösung $\lambda = -3$. Damit ergibt sich die linear unabhängige Lösung

$$x_1(t) = e^{-3t},$$

und Gesamtlösung

$$x(t) = a_1 e^{-3t}.$$

- (b) Bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung suchen wir zwei linear unabhängige Lösungen:

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 3x(t) = 0$$

DGL,

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

charakteristische Gleichung,

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 1$$

Lösungen der charakteristische Gleichung,

$$x_1(t) = e^{-3t}, \quad x_2(t) = e^{-t}$$

linear unabhängige Lösungen,

$$x(t) = a_1 e^{-3t} + a_2 e^{-t}$$

und Gesamtlösung.

- (c) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ hat die doppelte Nullstelle $\lambda = -1$. Damit ergeben sich für die linear unabhängigen Lösungen

$$x_1(t) = e^{-t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = te^{-t},$$

und somit die Gesamtlösung

$$x(t) = a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t}.$$

- (d) $\ddot{x}(t) + 4x(t) + 5 = 0$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Damit ergibt sich

$$x_1(t) = e^{-2t} e^{it}, \quad x_2(t) = e^{-2t} e^{-it} \quad \text{und} \quad x(t) = a_1 e^{-2t} e^{it} + a_2 e^{-2t} e^{-it}.$$

Allerdings:

Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ linear unabhängige Lösungen, so sind dies auch $\bar{x}_{1,2} = x_1(t) \pm x_2(t)$ und damit

$$\bar{x}_1(t) = e^{-2t} \sin t \quad \text{und} \quad \bar{x}_2(t) = e^{-2t} \cos t.$$

Die allgemeine Lösung lässt sich daher auch schreiben als

$$x(t) = \bar{a}_1 e^{-2t} \sin t + \bar{a}_2 e^{-2t} \cos t.$$

5. Wurf mit Reibung

4 Punkte

Der senkrechte Wurf eines Massenpunktes der Masse m im Schwerfeld der Erde sei durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$m\ddot{z}(t) = -mg - \gamma\dot{z}(t), \quad \gamma > 0, \quad (1)$$

wobei $\gamma\dot{z}$ den Einfluss der Stokes'schen Reibung beschreiben soll.

Bestimmen Sie die Bahnkurve des Massepunkts unter den Anfangsbedingungen $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = v_{z,0}$ in dem Sie die inhomogene Differentialgleichung (1) lösen. Gehen sie dazu wie folgt vor:

- (a) Bestimmen Sie Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Wir bringen die DGL auf die gewohnte Form

$$\ddot{z}(t) + \frac{\gamma}{m}\dot{z}(t) = 0$$

und erhalten als Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -\frac{\gamma}{m}$. Damit

$$z_h(t) = a_1 + a_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}.$$

- (b) Finden Sie die Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) + \frac{\gamma}{m}\dot{z}(t) = -g$$

sieht man in diesem einfachen Fall oder erhält durch den Ansatz $z = at + b$ mit $z_{inhom}(t) = \frac{-gm}{\gamma}t$.

- (c) Bestimmen Sie die freien Parameter aus den Anfangsbedingungen.

Die Gesamtlösung ist gegeben durch

$$z(t) = a_1 + a_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{gm}{\gamma}t$$

aus den Anfangsbedingung erhalten wir somit aus

$$z(0) = a_1 + a_2 = 0 \quad \text{und} \quad \dot{z}(0) = -a_2 \frac{\gamma}{m} - \frac{gm}{\gamma} = v_0,$$

$$a_2 = -\frac{v_{0,x}m}{\gamma} - \frac{gm^2}{\gamma^2}, \quad a_1 = -a_2 = \frac{v_{0,x}m}{\gamma} + \frac{gm^2}{\gamma^2}$$

$$z(t) = \left(\frac{v_{0,z}m}{\gamma} + \frac{gm^2}{\gamma^2}\right)(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) - \frac{gm}{\gamma}t$$

Verallgemeinern Sie die Lösung auf den schrägen Wurf mit Reibung.

Die Differentialgleichung des schrägen Wurfs ist gegeben durch

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -mg\mathbf{e}_z - \gamma\dot{\mathbf{r}}(t). \quad (2)$$

- (d) Nutzen Sie die gefundene Lösung um Gl. (2) mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(0) = 0$ und $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 = v_0(\cos\alpha\mathbf{e}_x + \sin\alpha\mathbf{e}_z)$ zu lösen.

In den einzelnen Koordinaten erhalten wir zwei (ungekoppelte) Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -\gamma\dot{x}(t) \\ m\ddot{z}(t) &= -mg - \gamma\dot{z}(t) \end{aligned}$$

$z(t)$ haben wir schon zuvor berechnet:

$$z(t) = \left(\frac{mv_0 \sin \alpha}{\gamma} + \frac{gm^2}{\gamma^2} \right) (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) - \frac{gm}{\gamma}t.$$

Für $x(t)$ haben wir eine homogene Differentialgleichung deren Lösung wir auch schon berechnet haben:

$$x(t) = b_1 + b_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}.$$

Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir noch $b_1 = -b_2$ und $b_2 = -\frac{m}{\gamma}v_0 \cos \alpha$ und damit

$$x(t) = \frac{m}{\gamma}v_0 \cos \alpha (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}).$$

Möglichkeit 2:

Wir führen durch die $\dot{z}(t) = v_z(t)$ die Differentialgleichung auf die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{v}_z(t) + \frac{\gamma}{m} v_z(t) = -g$$

zurück.

- (a) Bestimmen Sie Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Für $\dot{v}_z(t) + \frac{\gamma}{m} v_z(t)$ erhält man als Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda_2 = -\frac{\gamma}{m}$.
Damit

$$v_z(t) = a_1 e^{-\frac{\gamma}{m} t}.$$

- (b) Finden Sie die Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\dot{v}_z(t) + \frac{\gamma}{m} v_z(t) = -g$$

sieht man in diesem einfachen Fall oder erhält durch den Ansatz $v_z = a$ die Lösung $v_{z,\text{inhom}}(t) = \frac{-gm}{\gamma}$.

- (c) Bestimmen Sie die freien Parameter aus den Anfangsbedingungen.

$$v_z(0) = a_1 - \frac{gm}{\gamma} = v_{z,0} \quad \rightarrow \quad a_1 = v_{z,0} + \frac{gm}{\gamma}$$

Die Gesamtlösung erhalten wir nun durch Integration

$$z(t) - z(0) = \int_0^t dt' v_z(t') = -a_1 \frac{m}{\gamma} (e^{-\frac{\gamma}{m} t} - 1) - \frac{gm}{\gamma} t$$

und nach Einsetzen von a_1 und $z(0) = 0$

$$z(t) = \left(\frac{v_{0,z} m}{\gamma} + \frac{gm^2}{\gamma^2} \right) (1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t}) - \frac{gm}{\gamma} t$$

Verallgemeinern Sie die Lösung auf den schrägen Wurf mit Reibung.

Die Differentialgleichung des schrägen Wurfs ist gegeben durch

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -mg \mathbf{e}_z - \gamma \dot{\mathbf{r}}(t). \quad (3)$$

- (d) Nutzen Sie die gefundene Lösung um Gl. (3) mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(0) = 0$ und $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 = v_0(\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_z)$ zu lösen.

In den einzelnen Koordinaten erhalten wir zwei (ungekoppelte) Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x(t) &= -\gamma v_x(t) \\ m\dot{v}_z(t) &= -mg - \gamma v_z(t) \end{aligned}$$

$z(t)$ haben wir schon zuvor berechnet:

$$z(t) = \left(\frac{mv_0 \sin \alpha}{\gamma} + \frac{gm^2}{\gamma^2} \right) (1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t}) - \frac{gm}{\gamma} t.$$

Für $x(t)$ haben wir eine homogene Differentialgleichung deren Lösung wir auch schon berechnet haben:

$$v_x(t) = b_1 e^{-\frac{\gamma}{m} t}.$$

Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir $b_1 = v_0 \cos \alpha$, und nach Integration

$$x(t) = \frac{m}{\gamma} v_0 \cos \alpha (1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t}).$$