KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE | INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL
DR. ANDREAS POENICKE, MSC. KARIM MNASRI

Blatt 12
Abgabe: 24.01.2017

1. Amplitudenmodulation [9 Punkte]

Ein Radiosender sendet ein Signal mit der Frequenz Ω. Die eingestrahlten Radiowellen induzieren eine oszillierende Spannung $V_0 \cos(\Omega t)$ in der Antenne. Letztere wirkt als Wechselspannungsquelle für einen LCR-Stromkreis, und das für den Empfänger wichtige Signal ist die Spannung $V_C(t)$, die über dem Kondensator abfällt. L ist die Induktivität, C die Kapazität und R der Widerstand des LCR-Stromkreises.

(a) [1 Punkt] Die Differentialgleichung für die Ladung auf dem Kondensator des LCR-Stromkreises,

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = V_0 \cos(\Omega t)\,,$$

kann in die Form der Gleichung für einen getriebenen harmonischen Oszillator,

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f\cos(\Omega t)$$

gebracht werden. Was sind x, γ, ω_0 und f als Funktionen von R, C, L, V_0 und der Ladung Q auf dem Kondensator?

(b) [2 Punkte] In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine partikuläre Lösung dieser DGL die Form $x_s(t) = |\chi(\Omega)| f \cos(\Omega t + \alpha)$ hat, wobei

$$|\chi(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\Omega\right)^2}}$$

ist.
Berechnen Sie die Frequenz Ω_r bei der $|\chi(\Omega)|$ sein Maximum $|\chi|_{\max}$ annimmt. Wie groß ist $|\chi|_{\max}$?

(c) [3 Punkte] Jetzt soll die Linienbreite der Kurve $|\chi(\Omega)|$ abgeschätzt werden.
Schreiben Sie dazu zunächst $\frac{|\chi(\Omega)|}{|\chi|_{\max}}$ als Funktion der Variablen $\frac{\Omega}{\omega_0}$ und $\frac{\gamma}{\omega_0}$.
Jetzt suchen Sie eine Gleichung für die Frequenzen $\Omega_{1,2}$, für die $\left(\frac{|\chi(\Omega_{1,2})|}{|\chi|_{\max}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ gilt.
Erst jetzt führen Sie die Annahme $\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$ durch. Damit lässt sich der Ausdruck für $\frac{\Omega_{1,2}}{\omega_0}$ vereinfachen, indem man eine Reihenentwicklung für die auftretenden Wurzelfunktionen macht: $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x + \cdots$, für $x \ll 1$.
Leiten Sie einen einfachen Ausdruck für $\frac{\Omega_{1,2}}{\omega_0}$ her, indem Sie nur Terme behalten, die linear in $\frac{\gamma}{\omega_0}$ sind. Wie Groß ist dann die Linienbreite?

(d) [1 Punkt] Berechnen Sie die Amplitude $V_{C,\max}$ der Kondensatorspannung $V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$ im Resonanzfall $\Omega_r \approx \omega_0$ (unter der Annahme $\gamma \ll \omega_0$). Das Verhältnis $\frac{V_{C,\max}}{V_0}$ wird die Verstärkung des Stromkreises genannt.

(e) [2 Punkte] Eine andere Station sendet mit einer anderen Trägerfrequenz Ω'. Wenn der Empfänger nach wie vor auf die erste Senderfrequenz Ω (also $\omega_0 = \Omega$) eingestellt ist, gilt die Resonanzbedingung nicht für die zweite Station; folglich werden deren Signale viel schwächer verstärkt als die in der ersten, mit Amplitude $V'_{C,\max}$.
Berechnen Sie das Verhältnis der Verstärkungsamplituden, $\frac{V'_{C,\max}}{V_{C,\max}}$, als Funktion von $\frac{\Omega'}{\Omega}$ und $\frac{\gamma}{\Omega}$. Skizzieren Sie $\frac{V'_{C,\max}}{V_{C,\max}}$ als Funktion von $\frac{\Omega'}{\Omega}$.

2. Drehimpuls beim 3D harmonischen Oszillator [2 Punkte]

Gegeben Sei der dreidimensionale harmonische Oszilator mit linearer Reibung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} - \gamma\dot{\mathbf{r}}\,.$$

Zeigen Sie, dass hier das Drehmoment eine Funktion des Drehimpulses ist. Berechnen Sie des weiteren den Drehimpuls als Funktion der Zeit.

3. Fourier-Transformation [5 Punkte]

In der Vorlesung wurde die Fourier-Transformation

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \qquad \text{und} \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \tilde{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,,$$

für eine integrierbare Funktion $f(x)$ eingeführt.

(a) [3 Punkte] Zeigen Sie folgende Relationen für die Fourier-Transformationen der Funktionen f_i

$$\begin{array}{llcl} \text{(i)} & f_1(x) = f(x-\alpha) & \Rightarrow & \tilde{f}_1(k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha k}\tilde{f}(k) \\ \text{(ii)} & f_2(x) = f(\alpha x) & \Rightarrow & \tilde{f}_2(k) = \dfrac{1}{|\alpha|}\tilde{f}\left(\dfrac{k}{\alpha}\right) \\ \text{(iii)} & f_3(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f(x) & \Rightarrow & \tilde{f}_3(k) = \tilde{f}(k-\alpha) \end{array}$$

wobei $\tilde{f}$ die Fourier-Transformierte Funktion von f ist.

(b) [2 Punkte] Sei g nun eine mindestens n-mal stetig differenzierbare Funktion mit Fouriertransformierter $\tilde{g}(k)$. Für jede Ableitung $g^{(n)}$ gelte $\lim_{x\to\pm\infty} g^{(n)}(x) = 0$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$g_n(x) := g^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} g(x) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{g}_n(k) = (\mathrm{i}k)^n \tilde{g}(k)\,.$$

Das heißt, dass aus der Differentiation im Real-Raum eine einfache Multiplikation im Fourier-Raum wird.

4. Partikuläre Lösung [4 Punkte]

Es gilt, eine allgemeine Formel zur Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung (DGL)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)\,. \tag{1}$$

herzuleiten.

(a) [2 Punkte] Zerlegen Sie die linke Seite von (1) in Linearfaktoren und setzen Sie $y(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \mathrm{i}\omega\right) x(t)$. Sie erhalten eine inhomogene lineare DGL der ersten Ordnung für $y(t)$. Lösen Sie diese DGL durch Variation der Konstanten, d.h. durch einen Ansatz der Form

$$y(t) = u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,.$$

(b) [1 Punkt] Lösen Sie die verbliebene DGL erster Ordnung für $x(t)$ mit einem analogen Ansatz. Sie erhalten die gesuchte allgemeine Formel durch Einsetzen des Ergebnisses von (a).
Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$x(t) = \int^t \mathrm{d}t' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')} \int^{t'} \mathrm{d}t'' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t'-t'')} f(t'')\,. \tag{2}$$

(c) [1 Punkt] Verifizieren Sie die Lösungsformel (2) für $f(t) = at$.
Hinweis: $\int t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda t - 1)$.