

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 12

DR. ANDREAS POENICKE, MSC. KARIM MNASRI

Abgabe: 24.01.2017**1. Amplitudenmodulation**

[9 Punkte]

- (a) [1 Punkt] Die Differentialgleichung für die Ladung auf dem Kondensator des LCR-Stromkreises,

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = V_0 \cos(\Omega t),$$

kann in die Form der Gleichung für einen getriebenen harmonischen Oszillator,

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f \cos(\Omega t)$$

gebracht werden. Was sind x , γ , ω_0 und f als Funktionen von R , C , L , V_0 und der Ladung Q auf dem Kondensator?

Durch Substitution $x(t) = Q(t)$ und Teilen der DGL durch L findet man

$$\gamma = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad f = \frac{V_0}{L}.$$

- (b) [2 Punkte] In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine partikuläre Lösung dieser DGL die Form $x_s(t) = |\chi(\Omega)| f \cos(\Omega t + \alpha)$ hat, wobei

$$|\chi(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

ist.

Berechnen Sie die Frequenz Ω_r bei der $|\chi(\Omega)|$ sein Maximum $|\chi|_{\max}$ annimmt. Wie groß ist $|\chi|_{\max}$?

$|\chi(\Omega)|$ wird maximal, wenn der Nenner ein Minimum annimmt. Das Minimum findet man aus

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2] &= 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega [2\gamma^2 - (\omega_0^2 - \Omega^2)] = 0 \\ &\Rightarrow \quad \Omega = 0, \text{ oder } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \end{aligned}$$

An der Stelle $\Omega = 0$ hat $|\chi(\Omega)|$ aber ein Minimum, deshalb bleibt nur $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ als Lösung übrig. Die Lösung lässt sich auch schreiben als $\Omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}$.

Durch Einsetzen von Ω_r in $|\chi(\Omega)|$ findet man

$$|\chi|_{\max} = |\chi(\Omega_r)| = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{1}{2\gamma\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}}.$$

- (c) [3 Punkte] Jetzt soll die Linienbreite der Kurve $|\chi(\Omega)|$ abgeschätzt werden.

Schreiben Sie dazu zunächst $\frac{|\chi(\Omega)|}{|\chi|_{\max}}$ als Funktion der Variablen $\frac{\Omega}{\omega_0}$ und $\frac{\gamma}{\omega_0}$. Wir haben:

$$\begin{aligned} \frac{|\chi(\Omega)|^2}{|\chi|_{\max}^2} &= \frac{4\gamma^2\omega_0^2\left[1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\right]}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = \frac{4\gamma^2\omega_0^2\left[1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\right]}{\omega_0^4\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \\ &= \frac{4\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt im Zähler und Nenner durch ω_0^4 geteilt wurde. Um weniger Schreibarbeit zu haben, führen wir jetzt die folgende Notation ein:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega_0}, \quad \tilde{\Omega}_{1,2} = \frac{\Omega_{1,2}}{\omega_0},$$

und merken uns, dass $\tilde{\gamma} \ll 1$, wenn $\gamma \ll \omega_0$ ist.

Jetzt suchen wir eine Gleichung für die Frequenzen $\Omega_{1,2}$, für die $\left(\frac{|\chi(\Omega_{1,2})|}{|\chi|_{\max}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ gilt.

Wir haben

$$\left(\frac{|\chi(\Omega_{1,2})|}{|\chi|_{\max}}\right)^2 = \frac{4\tilde{\gamma}^2(1 - \tilde{\gamma}^2)}{(1 - \tilde{\Omega}_{1,2}^2)^2 + 4\tilde{\gamma}^2\tilde{\Omega}_{1,2}^2} = \frac{1}{2}$$

Umschreiben liefert die Bedingung:

$$\tilde{\Omega}_{1,2}^4 + 2\tilde{\Omega}_{1,2}^2(2\tilde{\gamma}^2 - 1) + 1 - 8\tilde{\gamma}^2(1 - \tilde{\gamma}^2) = 0.$$

Und damit

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{1,2}^2 &= 1 - 2\tilde{\gamma}^2 \pm \sqrt{(1 - 2\tilde{\gamma}^2)^2 - 1 + 8\tilde{\gamma}^2(1 - \tilde{\gamma}^2)} \\ &= 1 - 2\tilde{\gamma}^2 \pm \sqrt{4\tilde{\gamma}^2 - 4\tilde{\gamma}^4} = 1 - 2\tilde{\gamma}^2 \pm 2\tilde{\gamma}\sqrt{1 - \tilde{\gamma}^2} \end{aligned}$$

Erst jetzt führen wir die Annahme $\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$ durch. Damit lässt sich der Ausdruck für $\frac{\Omega_{1,2}}{\omega_0}$ vereinfachen, indem man eine Reihenentwicklung für die auftretenden Wurzelfunktionen macht: $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x + \dots$, für $x \ll 1$. Damit bekommen wir

$$\tilde{\Omega}_{1,2}^2 \approx 1 \pm 2\tilde{\gamma}.$$

Daraus ergibt sich

$$\tilde{\Omega}_{1,2} = \sqrt{1 \pm 2\tilde{\gamma}} \approx 1 \pm \tilde{\gamma},$$

wobei wir wieder eine Reihenentwicklung der Wurzelfunktion gemacht haben. Wechseln wir wieder zu den Variablen ω_0 , $\Omega_{1,2}$ und γ , finden wir $\frac{\Omega_{1,2}}{\omega_0} \approx 1 \pm \frac{\gamma}{\omega_0}$, und daraus folgt

$$\Omega_{1,2} \approx \omega_0 \pm \gamma.$$

Die Breite der Funktion $|\chi(\Omega)|$ ist also $\Delta\Omega_{1,2} = 2\gamma$.

- (d) [1 Punkt] Die maximale Auslenkung $x_{\max}$ ist gegeben durch $x_{\max} = f|\chi|_{\max} = \frac{f}{2\gamma\omega_0}$ (unter der Annahme $\gamma \ll \omega_0$). Die maximale Spannung V_C ist damit gegeben durch

$$V_{C,\max} = \frac{Q_{\max}}{C} = \frac{f}{2\gamma\omega_0 C} = \frac{V_0}{2\gamma}\omega_0 = V_0\sqrt{\frac{L}{R^2C}},$$

wobei wir die Substitutionen aus der Teilaufgabe (a) verwendet haben.

- (e) [2 Punkte] Das Verhältnis der Signal-Amplituden beider Stationen ist gegeben durch

$$\frac{V'_{C,\max}}{V_{C,\max}} = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega'^2)^2 + 4\gamma^2\Omega'^2}} \cdot \frac{2\gamma\omega_0}{f} = \frac{2\frac{\gamma}{\omega_0}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega'}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\Omega'}{\omega_0}\right)^2}}.$$

Das Extremum liegt bei $\frac{\Omega'}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}{\omega_0}$. Für $\gamma \ll \omega_0$ liegt es aber in guter Näherung bei $\frac{\Omega'}{\omega_0} \approx 1$.

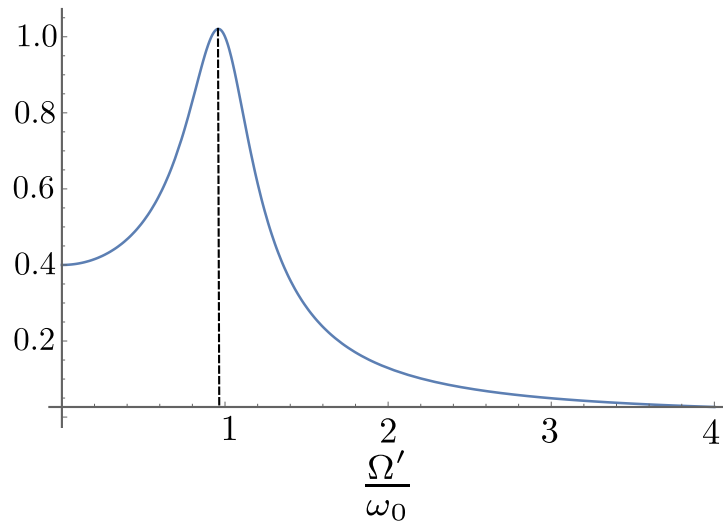


Abbildung 1: Verhältnis der Signalamplituden für $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0.2$.

2. Drehimpuls beim 3D harmonischen Oszillator

[2 Punkte]

Gegeben Sei der dreidimensionale harmonische Oszillator mit linearer Reibung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} - \gamma\dot{\mathbf{r}}.$$

Zeigen Sie, dass hier das Drehmoment eine Funktion des Drehimpulses ist. Berechnen Sie des weiteren den Drehimpuls als Funktion der Zeit.

Das Drehmoment ist definiert durch $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ wobei $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} - \gamma\dot{\mathbf{r}}$ ist. Somit gilt für das Drehmoment

$$\mathbf{M} = -\gamma\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\gamma}{m}\mathbf{L},$$

mit $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

Des weiteren gilt $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$. Somit erhalten wir eine DGL für den Drehimpuls

$$\dot{\mathbf{L}} = -\frac{\gamma}{m}\mathbf{L},$$

deren Lösung $\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}(0)e^{-\frac{\gamma}{m}t}$ ist. Der Drehimpuls wird immer kleiner und verschwindet Aufgrund der Reibung, bis das Teilchen bei $\mathbf{r} = 0$ zu Ruhe kommt.

3. Fourier-Transformation

[5 Punkte]

In der Vorlesung wurde die Fourier-Transformation

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} f(x) e^{-ikx} \quad \text{und} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx},$$

für eine integrierbare Funktion $f(x)$ eingeführt.

- (a) [3 Punkte] Zeigen Sie folgende Relationen für die Fourier-Transformationen der Funktionen f_i

$$(i) \quad f_1(x) = f(x - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}_1(k) = e^{-i\alpha k} \tilde{f}(k)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} f(x - \alpha) e^{-ikx} \\ &\text{substituiere } x' = x - \alpha, dx' = dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{2\pi} f(x') e^{-ik(x'+\alpha)} = e^{-ik\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{2\pi} f(x') e^{-ikx'} = e^{-ik\alpha} \tilde{f}(k). \end{aligned}$$

$$(ii) \quad f_2(x) = f(\alpha x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}_2(k) = \frac{1}{|\alpha|} \tilde{f}\left(\frac{k}{\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} f(\alpha x) e^{-ikx} \\ &\text{substituiere } x' = \alpha x, dx' = \alpha dx \\ \tilde{f}_2(k) &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{2\pi} f(x') e^{-i\frac{k}{\alpha}x'} \end{aligned}$$

Für $\alpha > 0$ können wir das Integral stehen lassen wie es ist. Für $\alpha < 0$ ändert sich jeweils das Vorzeichen vor ∞ und wir müssen die Integration „umdrehen“ was ein zusätzliches „-“ erzeugt. Mit $-\alpha = |\alpha|$ für $\alpha < 0$ finden wir damit

$$\tilde{f}_2(k) = \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{2\pi} f(x') e^{-i\frac{k}{\alpha}x'} = \frac{1}{|\alpha|} \tilde{f}\left(\frac{k}{\alpha}\right).$$

$$(iii) \quad f_3(x) = e^{i\alpha x} f(x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}_3(k) = \tilde{f}(k - \alpha)$$

Rechnung analog wie (i), nur Rückwärts.

- (b) [2 Punkte] Sei g nun eine mindestens n -mal stetig differenzierbare Funktion mit Fourier-transformierter $\tilde{g}(k)$. Für jede Ableitung $g^{(n)}$ gelte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g^{(n)}(x) = 0$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$g_n(x) := g^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} g(x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}_n(k) = (ik)^n \tilde{g}(k).$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$\tilde{g}_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} g^{(0)}(x) e^{-ikx} = \tilde{g}(k) = (ik)^0 \tilde{g}(k).$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Relation $\tilde{g}_n(k) = (ik)^n \tilde{g}(k)$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$ und partielle Integration:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{n+1}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} g^{(n+1)}(x) e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{g^{(n)}(x) e^{-ikx}}_{\rightarrow 0, \text{ da } g^{(n)}(\pm\infty)=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} (-ik) g^{(n)}(x) e^{-ikx} \\ &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} g^{(n)}(x) e^{-ikx} = ik \tilde{g}_n(k) \stackrel{IV}{=} (ik)^{n+1} \tilde{g}(k). \end{aligned}$$

Das heißt, dass aus der Differentiation im Real-Raum eine einfache Multiplikation im Fourier-Raum wird.

4. Partikuläre Lösung

[4 Punkte]

Es gilt, eine allgemeine Formel zur Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung (DGL)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t). \quad (1)$$

herzuleiten.

- (a) [2 Punkte] Zerlegen Sie die linke Seite von (1) in Linearfaktoren und setzen Sie

$$y(t) = \left(\frac{d}{dt} - i\omega \right) x(t).$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= f(t) \\ \left(\frac{d}{dt} + i\omega \right) \left(\frac{d}{dt} - i\omega \right) x(t) &= f(t) \\ \left(\frac{d}{dt} + i\omega \right) y(t) &= f(t) \end{aligned}$$

Wir erhalten eine inhomogene lineare DGL der ersten Ordnung für $y(t)$ und lösen diese DGL durch Variation der Konstanten, d.h. durch einen Ansatz der Form

$$y(t) = u(t)e^{-i\omega t}.$$

Dieser Ansatz führt auf

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t} \frac{du}{dt} - i\omega u(t)e^{-i\omega t} + i\omega u(t)e^{-i\omega t} &= f(t) \\ e^{-i\omega t} \frac{du}{dt} &= f(t) \\ \Rightarrow u(t) &= \int^t dt' e^{i\omega t'} f(t') \end{aligned}$$

und damit

$$y(t) = e^{-i\omega t} u(t) = \int^t dt' e^{-i\omega(t-t')} f(t') \quad (2)$$

- (b) [1 Punkt] Lösen Sie die verbliebene DGL erster Ordnung für $x(t)$ mit einem analogen Ansatz. Sie erhalten die gesuchte allgemeine Formel durch Einsetzen des Ergebnisses von (a). Die DGL für erster Ordnung $x(t)$ löst man dann analog

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{i\omega t} \int^t dt' e^{-i\omega(t-t')} y(t') \\ &= \int^t dt' e^{i\omega(t-t')} y(t') \end{aligned} \quad (3)$$

Einsetzen von (2) in (3) liefert

$$x(t) = \int^t dt' e^{i\omega(t-t')} \int^{t'} dt'' e^{-i\omega(t'-t'')} f(t''). \quad (4)$$

- (c) [1 Punkt] Für $f(t) = at$ ist

$$\begin{aligned} x(t) &= a \int^t dt' \left[e^{i\omega(t-t')} \int^{t'} dt'' t'' e^{-i\omega(t'-t'')} \right] = a \int^t dt' \left[e^{i\omega(t-t')} e^{-i\omega t'} \int^{t'} dt'' t'' e^{i\omega t''} \right] \\ &= a \int^t dt' e^{i\omega(t-t')} e^{-i\omega t'} \left[\frac{1}{-\omega^2} e^{i\omega t'} (i\omega t' - 1) \right] = -\frac{a}{\omega^2} e^{i\omega t} \int^t dt' e^{-i\omega t'} (i\omega t' - 1) \\ &= -\frac{a}{\omega^2} e^{i\omega t} \left[\frac{i\omega}{-\omega^2} e^{-i\omega t} (-i\omega t - 1) - \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \right] = \frac{a}{\omega^2} t. \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich eine Lösung von $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = at$.