Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl

Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Blatt 13

Abgabe: 31.01.2017

1. Noch mehr Fourier-Transformationen [5 Punkte]

Die Faltung $(f_1 * f_2)(x)$ zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist durch folgendes Integral definiert:

$$(f_1 * f_2)(x) = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x')f_2(x - x')\mathrm{d}x' \,. \tag{1}$$

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte der Faltung $(f_1 * f_2)(x)$ das Produkt $\tilde{f}_1(k) \cdot \tilde{f}_2(k)$ ist:

$$\tilde{g}(k) = 2\pi \tilde{f}_1(k) \cdot \tilde{f}_2(k) \,. \tag{2}$$

Das heißt, dass sich ein Faltungsintegral der Form (1) im Fourier-Raum in ein Produkt der Form (2) transformieren lässt. Die inverse Aussage gilt auch, d.h. die Fourier-Transformierte eines Produkts zweier Funktionen ergibt eine Faltung.

(b) Die Gauß-Funktion ist gegeben durch

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \,. \tag{3}$$

Diese Funktion ist normiert, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(x + \mathrm{i}\alpha)\mathrm{d}x = 1$, für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) [1 Punkt] Zeichnen Sie die Gauß-Funktion $f_\sigma(x)$ für verschiedene $\sigma > 0$ auf. Was ist die Bedeutung von σ?

(ii) [1 Punkt] Berechnen Sie jetzt die Fourier-Transformierte $\tilde{f}_\sigma(k)$ dieser Funktion. Wie sieht $\tilde{f}_\sigma(k)$ für verschiedene $\sigma > 0$ aus?
Hinweis: Der Integrand lässt sich durch quadratische Ergänzung in die Form (3) *bringen.*

(c) [1 Punkt] Wir definieren die Heaviside-Theta-Funktion als

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \; t \geq 0 \,, \\ 0 & \text{für } \; t < 0 \,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\theta(t)$, mit $\tau > 0$.

2. Heaviside θ-Funktion und δ-Distribution [2 Punkte]

In Aufgabe 1c) wurde die Heaviside θ-Funktion eingeführt. Sie zeichnet sich durch einen Einheitssprung bei $x = 0$ aus. Zeigen Sie, dass die Ableitung der θ-Funktion die δ-Distribution ergibt, d.h. dass gilt $\dfrac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x)$. Zeigen Sie dazu, dass für jede stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ die Beziehung

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

für beliebige $x_1 < 0 < x_2$ gilt.
Hinweis: Nutzen Sie partielle Integration.

3. Drude-Formel [6 Punkte]

Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Elektrons der Masse m und Ladung e, das sich in einem Metall unter Einfluss eines elektrischen Feldes $E(t)$ bewegt, kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$m\dot{v}(t) + m\frac{v(t)}{\tau} = eE(t)\,. \tag{4}$$

Hierbei ist τ die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen des Elektrons an Störstellen im Metall. Die Stromdichte ist durch $j(t) = env(t)$ gegeben (n ist die Elektronendichte). Durch Einsetzen der inversen Fourier-Transformation, $v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \tilde{v}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, lässt sich die Drude Formel $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$ herleiten. Dabei ist $\tilde{\sigma}(\omega)$ die (frequenzabhängige) Leitfähigkeit.

(a) [2 Punkte] Berechnen Sie $\tilde{\sigma}(\omega)$ indem Sie Gl. (4) Fourier-transformieren.

(b) [1 Punkt] Berechnen Sie den Gleichstrom $\bar{j}$, d.h. den (zeitlich konstanten) Wert, den $j(t)$ für den Fall eines zeitlich konstanten elektrisches Feldes $E(t) = E_0$ liefert. Bestimmen Sie dazu zunächst die Fourier-Transformierte $\tilde{E}(\omega)$ und daraus dann $j(t)$ durch Inverse Fourier-Transformation.

(c) [3 Punkte] Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall eines beliebigen elektrischen Feldes $E(t)$. Leiten Sie aus der Beziehung $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$ einen Ausdruck für $j(t)$ her, indem Sie das Faltungstheorem und das Ergebnis aus Aufgabe 1(c) benutzen. Überprüfen Sie mit diesem Ausdruck das Ergebnis von Teilaufgabe (b).

4. Swing-by-Manöver [7 Punkte]

Eine Raumsonde der Masse m sei momentan unterwegs zum Saturn, und habe Energie durch einen ,,Swing-by” an Jupiter der Masse M gewonnen. Vor dem ,,Swing-by” sei die Geschwindigkeit der Raumsonde $\mathbf{u}$ und die des Jupiters $\mathbf{V}$. Danach seien sie $\mathbf{u}'$ bzw. $\mathbf{V}'$. Nehmen Sie an, dass Jupiter sich ursprünglich entlang der x-Achse bewegt. Wir untersuchen den vereinfachten Fall einer symmetrischen Bahnumlenkung um 45° gegen die Jupiterbahn (siehe Abbildung 1).

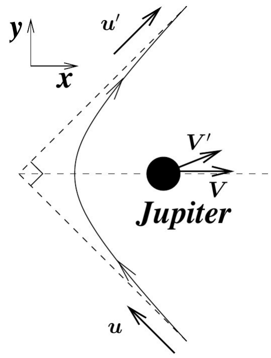

Abbildung 1: Swing-by-Manöver. Man nutzt die nutzt die Gravitationskraft von einem Planeten (hier Jupiter), um eine Raumsonde zu beschleunigen oder abzubremsen.

(a) [3 Punkte] Stellen Sie die Gleichungen für Energie- und Impulserhaltung auf. Mit Hilfe der Impulserhaltung können Sie $\mathbf{V}'$ eliminieren und eine quadratische Gleichung für u'_x herleiten.
Hinweis: Nutzen Sie die Geometrie des Swing-by-Manövers.

(b) [4 Punkte] Lösen Sie die quadratische Gleichung für u'_x und entwickeln Sie das Ergebnis bis zu linearer Ordnung in $\frac{m}{M}$.
Hinweis: Nutzen Sie die Näherungsformel $(1+x)^y \approx 1 + yx$, *für* $|x| \ll 1$.
Welchen Bahnen der Raumsonde entsprechen die zwei Lösungen? Wie viel kinetische Energie gewinnt die Raumsonde auf der abgebildeten Bahn?
Hinweis: Betrachten Sie den Limes $\frac{m}{M} \to 0$ *um ihre Entscheidungen zu erleichtern.*