

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 13

DR. ANDREAS POENICKE, MSC. KARIM MNASRI

Abgabe: 31.01.2017

1. Noch mehr Fourier-Transformationen

[7 Punkte]

Die Faltung $f_1 * f_2(x)$ zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist durch folgendes Integral definiert:

$$(f_1 * f_2)(x) = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2(x - x') dx'. \quad (1)$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte der Faltung $(f_1 * f_2)(x)$ das Produkt $\tilde{f}_1(k) \cdot \tilde{f}_2(k)$ ist:

$$\tilde{g}(k) = 2\pi \tilde{f}_1(k) \cdot \tilde{f}_2(k). \quad (2)$$

$$\tilde{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} (f_1 * f_2)(x) e^{-ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2(x - x') dx' \right] e^{-ikx}$$

Nun machen wir eine Variablensubstitution : $x'' = x - x'$ (und x' bleibt x') und bekommen

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f_1(x') \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx''}{2\pi} f_2(x'') e^{-ik(x'+x'')} \right] \\ &\stackrel{\frac{2\pi}{2\pi}}{=} 2\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{2\pi} f_1(x') e^{-ikx'} \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx''}{2\pi} f_2(x'') e^{-ikx''} \right] \\ &= 2\pi \tilde{f}_1(k) \cdot \tilde{f}_2(k). \end{aligned}$$

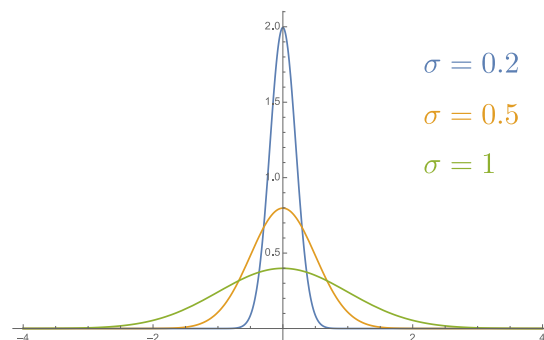
Das heißt, dass sich ein Faltungsintegral der Form (1) im Fourier-Raum in ein Produkt der Form (2) transformieren lässt. Die inverse Aussage gilt auch, d.h. die Fourier-Transformierte eines Produkts zweier Funktionen ergibt eine Faltung.

- (b) Die Gauß-Funktion ist gegeben durch

$$f_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (3)$$

Diese Funktion ist normiert, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\sigma}(x + i\alpha) dx = 1$, für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) [1 Punkt] Zeichnen Sie die Gauß-Funktion $f_{\sigma}(x)$ für verschiedene $\sigma > 0$ auf. Was ist die Bedeutung von σ ?



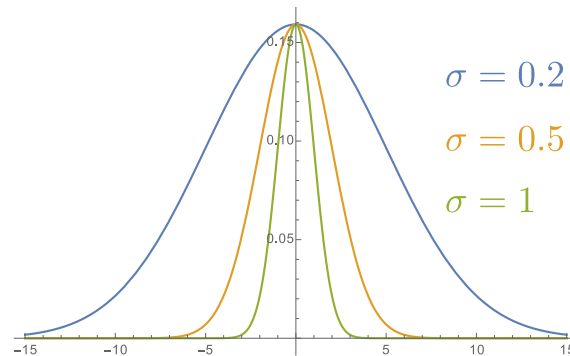
σ definiert die Halbwertsbreite FWHM (Full width (at) half maximum) mit $\text{FWHM} = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma$.

- (ii) [1 Punkt] Berechnen Sie jetzt die Fourier-Transformierte $\tilde{f}_\sigma(k)$ dieser Funktion. Wie sieht $\tilde{f}_\sigma(k)$ für verschiedene $\sigma > 0$ aus?

$$\begin{aligned}\tilde{f}_\sigma(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} f_\sigma(x) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + ikx2\sigma^2)}.\end{aligned}$$

Nun schreiben wir $x^2 + ikx2\sigma^2 = (x + ik\sigma^2)^2 + (k\sigma^2)^2$. Damit wird das Integral zu

$$\tilde{f}_\sigma(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+ik\sigma^2)^2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}.$$



Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion ist wieder eine Gauß-Funktion mit der Breite $\frac{1}{\sigma}$.

- (c) [1 Punkt] Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\theta(t)$, mit $\tau > 0$.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} f(t) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-\frac{t}{\tau}} \theta(t) e^{-i\omega t} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-(\frac{1}{\tau} + i\omega)t} = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{\frac{1}{\tau} + i\omega} e^{-(\frac{1}{\tau} + i\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau}{1 + i\omega\tau}\end{aligned}$$

2. Heaviside θ -Funktion und δ -Distribution

[2 Punkte]

In Aufgabe 1c) wurde die Heaviside θ -Funktion eingeführt. Sie zeichnet sich durch einen Einheitssprung bei $x = 0$ aus. Zeigen Sie, dass die Ableitung der θ -Funktion die δ -Distribution ergibt, d.h. dass gilt $\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$. Zeigen Sie dazu, dass für jede stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ die Beziehung

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\theta(x)}{dx} f(x) dx = f(0)$$

für beliebige $x_1 < 0 < x_2$ gilt.

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d\theta}{dx} f(x) &= \theta(x) f(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \theta(x) \frac{df(x)}{dx} dx \\ &= \theta(x_2) f(x_2) - \theta(x_1) f(x_1) - \int_0^{x_2} \frac{df(x)}{dx} dx \\ &= f(x_2) - 0 - [f(x_2) - f(0)] \\ &= f(0)\end{aligned}$$

3. Drude-Formel

[6 Punkte]

Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Elektrons der Masse m und Ladung e , das sich in einem Metall unter Einfluss eines elektrischen Feldes $E(t)$ bewegt, kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$m\dot{v}(t) + m\frac{v(t)}{\tau} = eE(t). \quad (4)$$

Hierbei ist τ die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen des Elektrons an Störstellen im Metall. Die Stromdichte ist durch $j(t) = env(t)$ gegeben (n ist die Elektronendichte). Durch Einsetzen der inversen Fourier-Transformation, $v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{v}(\omega) e^{i\omega t}$, lässt sich die Drude Formel $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$ herleiten. Dabei ist $\tilde{\sigma}(\omega)$ die (frequenzabhängige) Leitfähigkeit.

- (a) [2 Punkte] Berechnen Sie $\tilde{\sigma}(\omega)$ indem Sie Gl. (4) Fourier-Transformieren.

Wir wissen aus Blatt 12 Aufgabe 3(b), dass

$$\tilde{\dot{v}}(\omega) = (i\omega)\tilde{v}(\omega)$$

gilt. Somit wird Gl. (4) im Fourier-Raum zu

$$\left(m i\omega + \frac{m}{\tau}\right) \tilde{v}(\omega) = e\tilde{E}(\omega)$$

und damit

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{e\tilde{E}(\omega)}{m\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)}.$$

Das ergibt $\tilde{j}(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}} \tilde{E}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \tilde{E}(\omega)$, mit

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\tau}{1 + i\omega\tau}$$

- (b) [1 Punkt] Berechnen Sie den Gleichstrom $\bar{j}$, d.h. den (zeitlich konstanten) Wert, den $j(t)$ für den Fall eines zeitlich konstanten elektrischen Feldes $E(t) = E_0$ liefert. Bestimmen Sie dazu zunächst die Fourier-Transformierte $\tilde{E}(\omega)$ und daraus dann $j(t)$ durch Inverse Fourier-Transformation.

In diesem Fall ist $\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} E_0 e^{-i\omega t} = E_0 \delta(\omega)$. Damit ist $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) E_0 \delta(\omega)$. Durch eine inverse Fourier-Transformation ergibt sich

$$j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{j}(\omega) e^{i\omega t} = \frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\tau}{1 + i\omega\tau} E_0 \delta(\omega) e^{i\omega t} = \frac{ne^2\tau}{m} E_0$$

- (c) [3 Punkte] Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall eines beliebigen elektrischen Feldes $E(t)$. Leiten Sie aus der Beziehung $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$ einen Ausdruck für $j(t)$ her, indem Sie das Faltungstheorem und das Ergebnis aus Aufgabe 1(c) benutzen. Überprüfen Sie mit diesem Ausdruck das Ergebnis von Teilaufgabe (b).

Wenn $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \tilde{E}(\omega)$, dann wissen wir aus Aufgabe 1(a), dass $j(t)$ gegeben ist durch

$$j(t) = \frac{1}{2\pi} (\sigma * E)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t') E(t - t') dt'$$

In Aufgabe 1(c) haben wir ausgerechnet, dass die Fourier-Transformierte von $f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \theta(t)$ gleich $\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau}{1 + i\omega\tau}$ ist. Nun hat aber $\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\tau}{1 + i\omega\tau}$ genau die gleiche Form. Deswegen ist klar, dass $\sigma(t) = 2\pi \frac{ne^2}{m} e^{-\frac{t}{\tau}} \theta(t)$ sein muss. Wir bekommen damit für $j(t)$

$$j(t) = \frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-\frac{t'}{\tau}} \theta(t') E(t - t') = \frac{ne^2}{m} \int_0^{\infty} dt' e^{-\frac{t'}{\tau}} E(t - t').$$

Für ein konstantes elektrisches Feld $E(t) = E_0$, erhalten wir

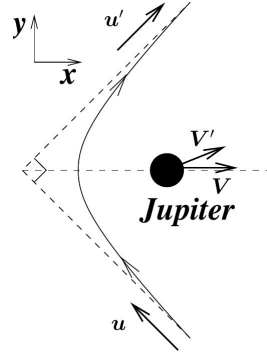
$$j(t) = \frac{ne^2}{m} E_0 \int_0^{\infty} dt' e^{-\frac{t'}{\tau}} = -\frac{ne^2\tau}{m} E_0 e^{-\frac{t'}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \frac{ne^2\tau}{m} E_0.$$

Das ist genau das Ergebnis das wir schon in Teilaufgabe (b) gefunden haben.

4. Swing-by-Manöver

[7 Punkte]

Eine Raumsonde der Masse m sei momentan unterwegs zum Saturn, und habe Energie durch einen „Swing-by“ an Jupiter der Masse M gewonnen. Vor dem „Swing-by“ sei die Geschwindigkeit der Raumsonde $\mathbf{u}$ und die des Jupiters $\mathbf{V}$. Danach seien sie $\mathbf{u}'$ bzw. $\mathbf{V}'$. Nehmen Sie an, dass Jupiter sich ursprünglich entlang der x -Achse bewegt. Wir untersuchen den vereinfachten Fall einer symmetrischen Bahnlenkung um 45° gegen die Jupiterbahn (siehe Abbildung 1).



- (a) [3 Punkte] Stellen Sie die Gleichungen für Energie- und Impulserhaltung auf. Mit Hilfe der Impulserhaltung können Sie $\mathbf{V}'$ eliminieren und eine quadratische Gleichung für u'_x herleiten.

Impulserhaltung in x - und y -Richtung:

$$mu_x + MV_x = mu'_x + MV'_x \quad (5)$$

$$mu_y + MV_y = mu'_y + MV'_y \quad (6)$$

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{M}{2}\mathbf{V}^2 &= \frac{m}{2}\mathbf{u}'^2 + \frac{M}{2}\mathbf{V}'^2 \\ \Rightarrow \frac{m}{2}(u_x^2 + u_y^2) + \frac{M}{2}(V_x^2 + V_y^2) &= \frac{m}{2}(u_x'^2 + u_y'^2) + \frac{M}{2}(V_x'^2 + V_y'^2) \end{aligned} \quad (7)$$

Aus der Geometrie folgt $u_y = -u_x$ und $u'_y = u'_x$. Außerdem gilt $V_y = 0$. Einsetzen in Gl. (5) und (6) liefert:

$$V'_x = V_x + \frac{m}{M}(u_x - u'_x) \quad (8)$$

$$V'_y = -\frac{m}{M}(u_x + u'_x) \quad (9)$$

Einsetzen in (7) liefert

$$\begin{aligned} mu_x^2 + \frac{M}{2}V_x^2 &= mu_x'^2 + \frac{M}{2}(V_x'^2 + V_y'^2) \\ \Rightarrow u_x^2 + \frac{M}{2m}V_x^2 &= u_x'^2 + \frac{M}{2m} \left[\left(V_x + \frac{m}{M}(u_x - u'_x) \right)^2 + \left(\frac{m}{M}(u_x + u'_x) \right)^2 \right] \\ \Rightarrow u_x'^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) - V_x u'_x + u_x^2 \left(\frac{m}{M} - 1 \right) + V_x u_x &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

- (b) [4 Punkte] Lösen Sie die quadratische Gleichung für u'_x und entwickeln Sie das Ergebnis bis zu linearer Ordnung in $\frac{m}{M}$.

Wir lösen Gl. (10) mit Hilfe der Standardformel für eine quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \left[\frac{V_x}{2} \pm \sqrt{\frac{V_x^2}{4} - \left(1 + \frac{m}{M}\right) \left[u_x^2 \left(\frac{m}{M} - 1\right) + V_x u_x \right]} \right] \\ &= \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1} \left[\frac{V_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{V_x}{2} - u_x\right)^2 - \frac{m}{M} V_x u_x - \frac{m^2}{M^2} u_x^2} \right] \\ &= \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1} \left[\frac{V_x}{2} \pm \left(\frac{V_x}{2} - u_x\right) \sqrt{1 - \frac{m}{M} \frac{V_x u_x}{\left(\frac{V_x}{2} - u_x\right)^2} - \frac{m^2}{M^2} \frac{u_x^2}{\left(\frac{V_x}{2} - u_x\right)^2}} \right]. \end{aligned}$$

Jetzt entwickeln wir zu linearer Ordnung in $\frac{m}{M}$:

$$\begin{aligned} u'_x &= \left(1 - \frac{m}{M} + \dots\right) \left[\frac{V_x}{2} \pm \left(\frac{V_x}{2} - u_x\right) \left(1 - \frac{m}{2M} \frac{V_x u_x}{\left(\frac{V_x}{2} - u_x\right)^2}\right) \right] \\ &= \frac{V_x}{2} \pm \left(\frac{V_x}{2} - u_x\right) + \frac{m}{M} \left\{ -\left[\frac{V_x}{2} \pm \left(\frac{V_x}{2} - u_x\right)\right] \mp \frac{V_x u_x}{2\left(\frac{V_x}{2} - u_x\right)} \right\} + \dots \\ &= \begin{cases} V_x - u_x - \frac{m}{M} \frac{V_x^2 - 2V_x u_x + 2u_x^2}{V_x - 2u_x} & \text{(obere Zeichen in der Wurzel)} \\ u_x + \frac{m}{M} \frac{2u_x^2}{V_x - 2u_x} & \text{(untere Zeichen in der Wurzel)} \end{cases} \end{aligned}$$

Welchen Bahnen der Raumsonde entsprechen die zwei Lösungen?

Im Limes $\frac{m}{M} \rightarrow 0$ bedeutet die 2. Lösung, dass die Raumsonde weiter nach links fliegt, da $u'_x = u_x < 0$. Die erste Lösung ist die abgebildete, es gilt $V_x > 0, u_x < 0 \Rightarrow u'_x > 0 \Rightarrow$ die Raumsonde fliegt nach rechts.

Wie viel kinetische Energie gewinnt die Raumsonde auf der abgebildeten Bahn?

Die gewonnene kinetische Energie (zu führender Ordnung) ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} &= \frac{\frac{m}{2} \mathbf{u}'^2 - \frac{m}{2} \mathbf{u}^2}{\frac{m}{2} \mathbf{u}^2} = \frac{\mathbf{u}'^2}{\mathbf{u}^2} - 1 = \frac{u_x'^2 + u_y'^2}{u_x^2 + u_y^2} - 1 \\ &= \frac{2u_x'^2}{2u_x^2} - 1 \approx \frac{(V_x - u_x)^2}{u_x^2} - 1 = \frac{V_x(V_x - 2u_x)}{u_x^2}. \end{aligned}$$

Da $u_x < 0$ ist, ist die Energieänderung immer positiv $\Rightarrow$ die Raumsonde fliegt schneller.