Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Dr. Andreas Poenicke, MSc. Karim Mnasri

Blatt 14
Abgabe: 07.02.2017

1. Zweikörperproblem 9 Punkte

Betrachten Sie ein System zweier Massepunkte der Masse m_1 und m_2 mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$. Zwischen den Massen wirke eine zeitunabhängige Zentralkraft

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\,.$$

(a) [1 Punkt] Drücken Sie diese innere Kraft durch ein Potential $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ aus und zeigen Sie darüber, dass das dritte Newton'sche Axiom erfüllt ist.

(b) [1 Punkt] Geben Sie die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{r}_1(t)$ und $\mathbf{r}_2(t)$ an.

(c) [1 Punkt] Definieren Sie den Schwerpunkt $\mathbf{r}_s$ und den Relativvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Drücken Sie $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ durch diese neuen Vektoren aus.

(d) [2 Punkte] Leiten Sie damit aus den Bewegungsgleichungen aus Aufgabenteil b) die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{r}_s$ und $\mathbf{r}$ her. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung $\mathbf{r}$ der Gleichung für *einen* Massepunkt mit der *reduzierten Masse*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

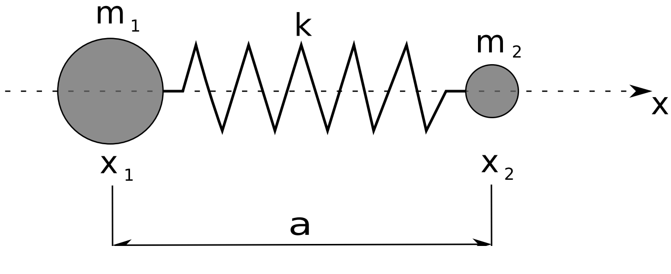
im Potential $U(|\mathbf{r}|)$ entspricht.

(e) [2 Punkte] Drücken Sie die Gesamtenergie E und den Gesamtimpuls $\mathbf{p}$ durch die reduzierte Masse μ, die Gesamtmasse M und die Ortsvektoren $\mathbf{r}_s$ und $\mathbf{r}$ (und deren Ableitungen) aus.

(f) [2 Punkte] Drücken Sie entsprechend den Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ des Systems durch Schwerpunkt- und Relativkoordinaten aus. Zeigen Sie, dass für $\mathbf{r}_s = \dot{\mathbf{r}}_s = 0$ der Vektor $\mathbf{r}$ in einer (zeitlich festen) Ebene liegt.

2. Molekül-Schwingung 7 Punkte

Ein Molekül sei beschrieben durch zwei ungleiche Punktmassen m_1 und m_2, die sich entlang der x-Achse bewegen können und über eine masselose Feder (Federkonstante k, Ruhelänge a) verbunden sind. Der Ort von Masse $m_{1/2}$ sei durch $x_{1/2}$ gegeben. Die Anordnung sieht wie folgt aus:



(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Geben Sie den Ausdruck für die Gesamtenergie $E(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ an.

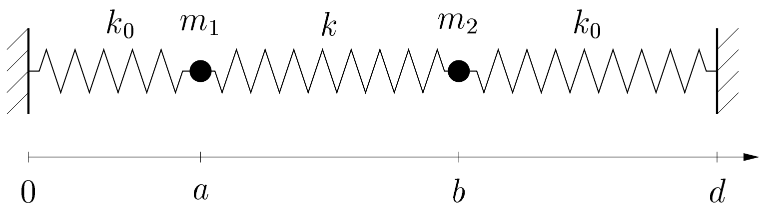
(b) [2 Punkte] Definieren Sie die Schwerpunktkoordinate $x_s(t)$ und die Relativkoordinate $x(t)$ und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $x_s(t)$ und $x(t)$. Geben Sie jeweils die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung an.

(c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Gesamtenergie $E(x, x_s, \dot{x}, \dot{x}_s)$, d.h. die Energie als Funktion der Schwerpunkt- und Relativkoordinaten. Welchen Wert erhalten Sie für die Energie unter Berücksichtigung der Lösung aus Aufgabenteil b)?

(d) [1 Punkt] Überprüfen Sie für die Relativbewegung die Gültigkeit des Virialsatzes.

3. Gekoppelte Oszillatoren 4 Punkte

Betrachten Sie die Bewegung zweier gekoppelter harmonischer Oszillatoren:



Die beiden Massen $m_1 = m_2 = m$ sind mit einer Feder (Federkonstante k) gekoppelt und mit Federn (Federkonstante k_0) zwischen zwei festen Wänden angebracht. Betrachtet werden soll die eindimensionale Bewegung, wobei die Ruhelagen der Massen durch die Punkte a und b gegeben sind.

(a) [2 Punkte] Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf, und nehmen Sie dabei ein zweckmäßige Aufteilung in innere und äußere Kräfte vor.

(b) [2 Punkte] Entkoppeln Sie die gefundenen Differentialgleichungen durch Einführung geeigneter neuer Koordinaten. Geben Sie die Lösung dieser Differentialgleichungen an.