

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2016/17

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 14

DR. ANDREAS POENICKE, MSC. KARIM MNASRI

Abgabe: 07.02.2017

1. Zweikörperproblem

9 Punkte

Betrachten Sie ein System zweier Massepunkte der Masse m_1 und m_2 mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$. Zwischen den Massen wirke eine zeitunabhängige Zentralkraft

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

- (a) [1 Punkt] Drücken Sie diese innere Kraft durch ein Potential $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ aus und zeigen Sie darüber, dass das dritte Newton'sche Axiom erfüllt ist.

Als Zentralkraft ist die Kraft $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ durch ein Potential bestimmt das nur von dem Betrag $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ abhängt. Die Kräfte sind damit gegeben durch

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\nabla_{\mathbf{r}_1} U(r) = -U'(r) \nabla_{\mathbf{r}_1} r = -U'(r) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

und

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\nabla_{\mathbf{r}_2} U(r) = -U'(r) \nabla_{\mathbf{r}_2} r = -U'(r) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = -\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

- (b) [1 Punkt] Geben Sie die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{r}_1(t)$ und $\mathbf{r}_2(t)$ an. Die Bewegungsgleichungen sind allgemein gegeben durch $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \sum_j \mathbf{F}_{ij}$. In unserem Fall ohne äussere Kraft ergibt sich somit

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}.$$

- (c) [1 Punkt] Definieren Sie den Schwerpunkt $\mathbf{r}_s$ und den Relativvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Drücken Sie $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ durch diese neuen Vektoren aus.

Schwerpunkt- und Relativvektor sind gegeben durch

$$\mathbf{r}_s = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

damit erhält man

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_s + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_s - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

- (d) [2 Punkte] Leiten Sie damit aus den Bewegungsgleichungen aus Aufgabenteil b) die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{r}_s$ und $\mathbf{r}$ her. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung $\mathbf{r}$ der Gleichung für *einen* Massepunkt mit der *reduzierten Masse*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

im Potential $U(|\mathbf{r}|)$ entspricht.

Die Bewegungsgleichungen sind gegeben durch

$$\ddot{\mathbf{r}}_s = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12}}{m_1 + m_2} = 0,$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} + \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left(-U'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} &= \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12} = -\nabla_{\mathbf{r}} U(r) \end{aligned}$$

- (e) [2 Punkte] Drücken Sie die die Gesamtenergie E und den Gesamtimpuls $\mathbf{p}$ durch die reduzierte Masse μ , Gesamtmasse M und die Ortsvektoren $\mathbf{r}_s$ und $\mathbf{r}$ (und deren Ableitungen) aus.

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{1}{2} [U_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + U_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \\ &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\mathbf{r}}_s + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\mathbf{r}}_s - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 + U(r) \\ &= \frac{M}{2} \dot{\mathbf{r}}_s^2 + \frac{m_2 + m_1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + U(r) = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{r}}_s^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + U(r) \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = m_1 \left(\dot{\mathbf{r}}_s + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right) + m_2 \left(\dot{\mathbf{r}}_s - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right) = M \dot{\mathbf{r}}_s$$

- (f) [2 Punkte] Drücken Sie entsprechend den Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ des Systems durch Schwerpunkt- und Relativkoordinaten aus. Zeigen Sie, dass für $\mathbf{r}_s = \dot{\mathbf{r}}_s = 0$ der Vektor $\mathbf{r}$ in einer (zeitlich festen) Ebene liegt.

Der Gesamtdrehimpuls ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 \\ &= m_1 \left(\mathbf{r}_s + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \right) \times \left(\dot{\mathbf{r}}_s + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right) + m_2 \left(\mathbf{r}_s - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \right) \times \left(\dot{\mathbf{r}}_s - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right) \\ &= (m_1 + m_2) \mathbf{r}_s \times \dot{\mathbf{r}}_s + \mu \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \\ &= M \mathbf{r}_s \times \dot{\mathbf{r}}_s + \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Für den Fall $\mathbf{r}_s = \dot{\mathbf{r}}_s = 0$ ist der Schwerpunkt in Ruhe und der Ursprung liegt in der Schwerpunktskoordinate. Damit die Relativbewegung in einer (zeitlich festen) Ebene erfolgt muss nun der Relativdrehimpuls zeitlich konstant sein. Dies gilt da.

$$\frac{d}{dt} (\mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mu \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \left(-U'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0$$

Bemerkung:

Allgemein sind für dieses System der Schwerpunkts- und Relativdrehimpuls getrennt erhalten

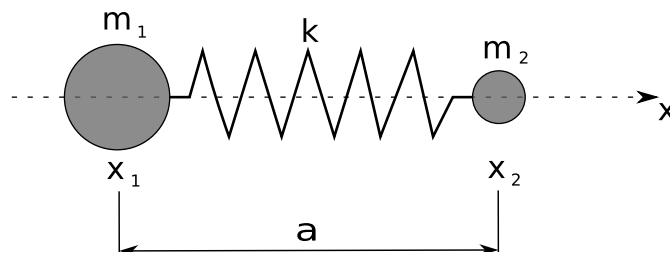
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M \mathbf{r}_s \times \dot{\mathbf{r}}_s &= M \mathbf{r}_s \times \ddot{\mathbf{r}}_s = 0 \quad (\text{abgeschlossenes System}) \\ \frac{d}{dt} \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} &= \mu \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (\text{Zentralkraft, } \mathbf{r} \parallel \ddot{\mathbf{r}}). \end{aligned}$$

Für $\dot{\mathbf{r}}_s \neq 0$ findet die Relativbewegung im Schwerpunktsystem damit zwar in einer Ebene statt, da der Schwerpunkt sich allerdings gleichförmig bewegt ist diese Ebene nicht zeitlich fest.

2. Molekül-Schwingung

7 Punkte

Ein Molekül sei beschrieben durch zwei ungleiche Punktmassen m_1 und m_2 , die sich entlang der x -Achse bewegen können und über eine masselose Feder (Federkonstante k , Ruhelänge a) verbunden sind. Der Ort von Masse $m_{1/2}$ sei durch $x_{1/2}$ gegeben:



- (a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Geben Sie den Ausdruck für die Gesamtenergie $E(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ an.

Die Bewegungsgleichungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F_1 = -k[a - (x_2 - x_1)] \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F_2 = +k[a - (x_2 - x_1)] \end{aligned}$$

wobei die Kräfte nur vom Abstand der beiden Punktmassen $x = x_1 - x_2$ abhängen. Das Potential ist ein harmonisches Potential um die Ruhelage a

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 - x_2) = \frac{k}{2}[a + (x_1 - x_2)]^2.$$

$$F_1 = -\frac{\partial U(x_1 - x_2)}{\partial x_1} = -k(a + x_1 - x_2) \quad F_2 = -\frac{\partial U(x_1 - x_2)}{\partial x_2} = -k(-1)(a + x_1 - x_2)$$

Damit ist die Gesamtenergie gegeben durch

$$E = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 + U(x_1 - x_2)$$

- (b) [2 Punkte] Definieren Sie die Schwerpunktkoordinate $x_s(t)$ und die Relativkoordinate $x(t)$ und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $x_s(t)$ und $x(t)$. Geben Sie jeweils die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung an.

Mit $x_s(t) = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1 + m_2}$ und $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ erhält man analog zu Aufgabe 1 die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x}_s(t) &= 0 \\ \mu \ddot{x}(t) &= -k(a + x). \end{aligned}$$

Das System ist frei von äußeren Kräften, somit erhalten wir wie erwartet für den Schwerpunkt eine gleichförmige Bewegung

$$x_s(t) = x_{s,0} + v_0 t.$$

Die Relativbewegung wird beschrieben durch einen harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 a, \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{\mu}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) - a.$$

- (c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Gesamtenergie $E(x, x_s, \dot{x}, \dot{x}_s)$, d.h. die Energie als Funktion der Schwerpunkt- und Relativkoordinaten. Welchen Wert erhalten Sie für die Energie unter Berücksichtigung der Lösung aus Aufgabenteil b)? Die Gesamtenergie ist gegeben durch

$$E = \frac{M}{2}\dot{x}_s^2 + \frac{\mu}{2}\dot{x}^2 + U(x), \quad U(x) = \frac{k}{2}(a+x)^2$$

Setzen wir die Lösung aus Aufgabenteil b) ein erhalten wir damit

$$E = \frac{M}{2}v_0^2 + \frac{\mu}{2} \left[-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \right]^2 + \frac{k}{2} \left[A \cos(\omega_0 t + \phi_0) \right]^2 = \frac{M}{2}v_0^2 + \frac{k}{2}A^2.$$

Die Energie ist also erhalten.

- (d) [1 Punkt] Überprüfen Sie für die Relativbewegung die Gültigkeit des Virialsatzes.

Der Virialsatz besagt, dass für beschränkte Bewegungen das zeitliche Mittel der kinetischen Energie dem halben Virial des Systems entspricht.

Für abgeschlossene Systeme reduziert sich dies, wenn das innere Potential die Form $U_{ij} = \alpha_{ij} r_{ij}^m$, $m \in \mathbb{Z}$ hat zu dem einfachen Ausdruck $2\bar{T} = m\bar{U}$. Er verknüpft so in einem einfachen Ausdruck den Mittelwert der kinetischen mit dem Mittelwert der potentiellen Energie.

Für den harmonischen Oszillator ist das Potential eine Funktion der relativen Abstände $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ eine positiv homogene Funktion vom Grad $m = 2$. Wir erwarten daher $2\bar{T} = 2\bar{U}$.

(Das Potential in Aufgabenteil c) ist in dieser Form keine homogene Funktion. Mit der Verschiebung $x' = x + a$ erhalten wir jedoch $U(x') = \frac{k}{2}x'^2$. Alternativ kann das Virial explizit berechnet werden.)

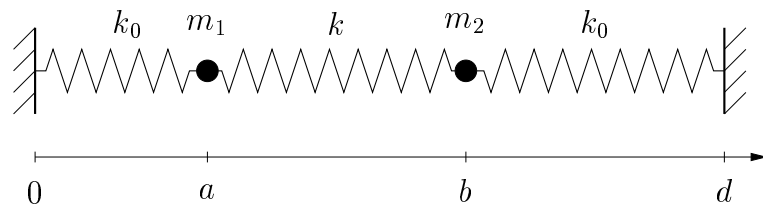
$$\begin{aligned} \bar{T} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \frac{\mu}{2} \left[-A\omega_0 \sin(\omega_0 t' + \phi_0) \right]^2 dt' = A^2 \frac{k}{4} \\ \bar{U} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \frac{k}{2} \left[A \cos(\omega_0 t' + \phi_0) \right]^2 dt' = \frac{k}{4} A^2 \end{aligned}$$

Es gilt also $\bar{T} = \bar{U}$.

3. Gekoppelte Oszillatoren

4 Punkte

Betrachten Sie die Bewegung zweier gekoppelter harmonischer Oszillatoren:



Die beiden Massen $m_1 = m_2 = m$ sind mit einer Feder (Federkonstante k) gekoppelt und mit Federn (Federkonstante k_0) zwischen zwei festen Wänden angebracht. Betrachtet werden soll die eindimensionale Bewegung, wobei die Ruhelagen der Massen durch die Punkte a und b gegeben sind.

- (a) [2 Punkte] Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf, und nehmen Sie dabei eine zweckmäßige Aufteilung in innere und äußere Kräfte vor.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k_0(x_1 - a) - k[(x_1 - x_2) - (a - b)] = F_1^a + F_{12} \\ m\ddot{x}_2 &= -k_0(x_2 - b) + k[(x_1 - x_2) - (a - b)] = F_2^a + F_{21} \\ F_1^a &= -k_0(x_1 - a), \quad F_{12} = -k[(x_1 - x_2) - (a - b)] \\ F_2^a &= -k_0(x_2 - b), \quad F_{21} = k[(x_1 - x_2) - (a - b)] = -F_{12} \end{aligned}$$

- (b) [2 Punkte] Entkoppeln Sie die gefundenen Differentialgleichungen durch Einführung geeigneter neuer Koordinaten. Geben Sie die Lösung dieser Differentialgleichungen an.

Möglichkeit 1:

Wir führen in einem ersten Schritt Koordinaten relativ zum jeweiligen Ruhezustand ein:

$$\bar{x}_1 = x_1 - a \quad \text{und} \quad \bar{x}_2 = x_2 - b.$$

damit vereinfachen sich die Differentialgleichungen zu

$$\begin{aligned} m\ddot{\bar{x}}_1 &= -k_0\bar{x}_1 - k(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \\ m\ddot{\bar{x}}_2 &= -k_0\bar{x}_2 + k(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \end{aligned}$$

Jetzt entkoppeln wir die Differentialgleichungen durch Einführung von Relativ- und Schwerpunktkoordinate:

$$\bar{x}_s = \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \quad \text{und} \quad \bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

Und erhalten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{\bar{x}}_s &= -k_0 \bar{x}_s \\ m\ddot{\bar{x}} &= -(k_0 + 2k) \bar{x}. \end{aligned}$$

Beides sind Differentialgleichungen eines harmonischen Oszillators mit den Lösungen

$$\begin{aligned} \bar{x}_s &= A \cos(\omega_s t + \phi_s), \quad \omega_s^2 = \frac{k_0}{m} \\ \bar{x} &= B \cos(\omega t + \phi), \quad \omega^2 = \frac{k_0 + 2k}{m} = \omega_s^2 + 2\omega_1^2. \end{aligned}$$

Möglichkeit 2:

Wir führen direkt Relativ- und Schwerpunktkoordinate ein

$$x_s = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad x = x_1 - x_2,$$

und erhalten die DGLs

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_s &= -k_0 x_s + \frac{k_0}{2}(a+b) \\ m\ddot{x} &= -(k_0 + 2k)x + (k_0 + 2k)(a-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_s &= A \cos(\omega_s t + \phi_s) + \frac{a+b}{2}, & \omega_s^2 &= \frac{k_0}{m} \\ x &= B \cos(\omega t + \phi) + (a-b), & \omega^2 &= \frac{k_0 + 2k}{m} = \omega_s^2 + 2\omega_1^2. \end{aligned}$$