Wintersemester 2017/18
Theorie A - Blatt 3

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: Mo, 30.10.17
Abgabe: Mo, 06.11.17
Besprechung: Fr, 10.11.17

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Aufgabe 1: Integration - Hyperbelfunktionen **6P**

Die Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

heißen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus. Tangens und Kotangens Hyperbolicus folgen gemäß $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ und $\coth x = (\tanh x)^{-1}$.

(a) 2P Zeigen Sie die Relationen

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \qquad \text{und} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

und skizzieren Sie die beiden Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ im Interval $x \in [-2, 2]$.

(b) 2P Berechnen Sie die Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh} x$ und $\operatorname{arcosh} x$. Schränken Sie dabei den Definitionsbereich von $\cosh x$ auf die reelle Achse ($x \geq 0$) ein.

(c) 2P Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale für $t > a > 0$, indem Sie geschickt substituieren:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt$$

Hinweis: Die Ableitungen der Umkehrfunktionen sind hilfreich.

Aufgabe 2: Bahnkurve - Natürliche Koordinaten **8P**

Ein Massenpunkt bewegt sich auf der Bahnkurve (im $\mathbb{R}^3$)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0, \tfrac{9}{2}\pi].$$

(a) 1P Skizzieren Sie die Kurve in der zweidimensionalen $x-y-$Ebene.

(b) 2P Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$, den Betrag der Geschwindigkeit $v(t) = |\vec{v}(t)|$ und den Tangenteneinheitsvektor $\vec{\tau}(t)$.

(c) 1P Bestimmen Sie den Hauptnormaleneinheitsvektor $\vec{n}(t)$ durch Berechnung von $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ und bestimmen Sie $c(t)$ aus $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = c(t)\vec{n}(t)$. *Hinweis:* Zur Kontrolle: $c(t) = 1 + \frac{1}{1+t^2}$.

(d) 1P Berechnen Sie den Krümmungsradius $R(t)$ und geben Sie $R(0)$ an.

(e) 2P Zerlegen Sie die Beschleunigung in die Komponenten $\vec{a}(t) = \vec{a}_{\parallel}(t) + \vec{a}_{\perp}(t)$ proportional zum Tangenteneinheitsvektor und dem Hauptnormaleneinheitsvektor. Skizzieren Sie deren Beträge $a_{\parallel}$ und $a_{\perp}$ als Funktion von t. Ist die Fahrt angenehm?

(f) $\boxed{1P}$ Zeigen Sie, dass der Binormaleneinheitsvektor zeitlich konstant ist.

Aufgabe 3: Matrizen - Rechnen mit Matrizen $\boxed{4P}$

Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\boxed{2P}$ Berechnen Sie die AC^T, $u^T A v$ und $B^T + C$. *Hinweis:* $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

(b) $\boxed{2P}$ Schreiben Sie $C_{ij} B_{kl} A_{jk}$ als Matrixmultiplikation und berechnen Sie das Resultat. Welche Werte können die Matrixindizes i und l haben und worüber laufen j und k?

Aufgabe 4: Matrizen - Drehimpulsalgebra $\boxed{2P}$

Gegeben seien die drei Matrizen aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Beziehung $\tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i = \epsilon_{ijk} \tau_k$

gilt, indem Sie für 3 beliebige Kombinationen aus $i, j \in \{1, 2, 3\}$ die linke Seite durch Matrixmultiplikation berechnen und mit der rechten Seite vergleichen. Was sagt dies über die Kommutativität der Matrixmultiplikation? *Hinweis*: Die linke Seite schreibt man häufig auch als Kommutator $[\tau_i, \tau_j] := \tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i$. Der Levi-Civita-Tensor ist Ihnen von Blatt 1 bekannt. Es gilt wieder Einstein'sche Summenkonvention.