Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator - Energieerhaltung **4P**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei im eindimensionalen Potential $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

(a) 1P Zeigen Sie, dass Energieerhaltung auf den Zusammenhang

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$$

führt, wobei $x(t_0) = x_0$ ist. *Hinweis:* In Aufgabe 3, Blatt 2 haben wir diese Beziehung ohne weitere Begründung bereits verwendet.

(b) 2P Lösen Sie das Integral für das angegebene Potential $V(x)$ bei fester Energie E für $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ und bestimmen Sie so die Bewegung des harmonischen Oszillators.

(c) 1P Bestimmen Sie den Maximalausschlag bei fester Energie E.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator - Drehimpuls **3P**

Wir betrachten den dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit linearer Reibung, der der Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - \gamma\dot{\vec{r}}$ genügt. Zeigen Sie, dass das Drehmoment eine Funktion des Drehimpulses ist. Formulieren Sie die DGL für den Drehimpuls. Lösen Sie diese und ermitteln Sie so den Drehimpuls als Funktion der Zeit.

Aufgabe 3: Mathematik - Θ, δ und die Stirn wirft Falten **4P**

Wir möchten noch zwei weitere mathematische Zusammenhänge verstehen:

(a) 2P Die Heavyside-Funktion ist definiert durch

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}. \quad \text{Verifizieren Sie, dass} \quad \Theta'(x) := \frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x)$$

gilt, indem Sie $\int_{x_1}^{x_2} dx \Theta'(x) f(x) = f(0)$ für jede stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ zeigen ($x_1 < 0 < x_2$). *Hinweis:* Partielle Integration ist hilfreich.

(b) 2P Die Faltung $(f_1 * f_2)(x)$ zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist durch folgendes Integral definiert:

$$g(x) = (f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f_1(x') f_2(x - x').$$

Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte der Faltung $(f_1 * f_2)(x)$ das Produkt der Fouriertransformierten ist, also $\tilde{g}(k) = 2\pi \tilde{f}_1(k) \cdot \tilde{f}_2(k)$ gilt.

Aufgabe 4: Harmonischer Oszillator - Der ultimative Kick $\boxed{\text{5P}}$

Gegeben sei ein frei bewegliches Teilchen, dass anfänglich ($t = 0$) im Ursprung ruht und dann von einer äußeren Kraft $f(t)$ ($f(t < 0) = 0$) beinflusst wird. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} = f(t)\,.$$

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie für $f(t) = v\delta(t - t_0)$ die Lösung $x(t)$ durch zweimaliges Integrieren. Interpretieren Sie die Konstante v. Verifizieren Sie Ihre Lösung durch Anwendung der Green Funktion $G(t - t')$ für den harmonischen Oszillator (mit ρ und ω) der Vorlesung, d.h. Berechnung des Faltungsintegrals $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') f(t')$. *Hinweis*: Nutzen Sie die Heavyside-Funktion. Bilden Sie den Limes $\omega, \rho \to 0$ zum Schluss.

(b) $\boxed{\text{3P}}$ Führen Sie die Rechnungen aus Teilaufgabe (a) erneut aus, diesmal für $f(t) = a\Theta(t)$. *Hinweis:* Sie müssen erst integrieren, bevor Sie den Limes $\omega, \rho \to 0$ in $G(t-t')$ durchführen.

Aufgabe 5: Harmonischer Oszillator - Periodische Anregung $\boxed{\text{4P}}$

Wir betrachten eine einfache Herleitung einer Antwortfunktion ähnlich zur Green Funktion der Vorlesung. Gegeben sei ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit periodischer Anregung $f(t) = f(t + T)$. Die DGL ist von der Form $\ddot{x}(t) + \rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$. Die periodische Anregung lässt sich in eine Fourierreihe zerlegen gemäß

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t} \qquad \text{mit} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad f_n = \frac{1}{T}\int_0^T dt' e^{-in\omega t'} f(t')\,.$$

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Machen Sie für den Störterm $f(t)$ einen Ansatz für eine partikuläre Lösung $x(t)$, basierend auf der Tabelle von Blatt 11 und Aufgabe 2 auf Blatt 12. Bestimmen Sie die Koeffizienten der partikulären Lösung durch Einsetzen in die DGL unter der Annahme, dass Beiträge proportional zu $e^{in\omega t}$ mit verschiedenen n getrennt verschwinden müssen. *Hinweis:* Belassen Sie vorerst f_n im Ergebnis.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Setzen Sie nun f_n in das Resultat für die partikuläre Lösung ein und zeigen Sie, dass Sie dies wieder auf die Form eines Faltungsintegrals bringen können:

$$x(t) = \int_0^T dt' \chi(t - t') f(t')\,.$$

Wie lautet die Antwortfunktion $\chi(t)$?

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Diskutieren Sie die Grenzfälle unendlich langsamer Anregung $\omega \to 0$ und sehr schneller Anregung $\omega \to \infty$.

Oh you can hear me cry,
See my dreams all die.

Theo fiel mir angfangs schwer,
doch das ist schon länger her.
Nun bin ich wohl besser geeicht,
denn es fällt mir öfter leicht.