

Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 1

M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Lösungsvorschlag

1. Teilchentrajektorie und Dreibein

(15 + 5 + 25 + 5 = 50 Punkte)

- (a) Um die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ der gegebenen Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ zu erhalten, müssen wir nach der Zeit ableiten

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (-R\omega \sin(\omega t + \phi), R\omega \cos(\omega t + \phi), c) \quad [5 \text{ P}] \quad (1)$$

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (-R\omega^2 \cos(\omega t + \phi), -R\omega^2 \sin(\omega t + \phi), 0) \quad [5 \text{ P}]. \quad (2)$$

Die zu dieser Beschleunigung benötigte Kraft ergibt sich einfach durch $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ aus dem obigen Resultat [5 P].

- (b) Die Bogenlänge errechnet sich zu

$$s(t) = \sqrt{R^2\omega^2 + c^2}t = \zeta^{-1}t, \quad (3)$$

mit $\zeta = 1/\sqrt{R^2\omega^2 + c^2}$ eine inverse Geschwindigkeit $[(m/s)^{-1}]$. [5 P]

- (c) Um das Dreibein zu berechnen, müssen wir die Zeit durch die Bogenlänge ersetzen $t(s) = \zeta s$ und nach s ableiten. Wir erhalten für die drei orthonormierten Vektoren des Dreibeins

$$\mathbf{t}(s) = d\mathbf{r}(s)/ds = (-R\omega\zeta \sin(\omega\zeta s + \phi), R\omega\zeta \cos(\omega\zeta s + \phi), c\zeta) \quad [5 \text{ P}] \quad (4)$$

$$\mathbf{n}(s) = (d\mathbf{t}/ds)/|d\mathbf{t}/ds| = (-\cos(\omega\zeta s + \phi), -\sin(\omega\zeta s + \phi), 0) \quad [5 \text{ P}] \quad (5)$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = (c\zeta \sin(\omega\zeta s + \phi), -c\zeta \cos(\omega\zeta s + \phi), R\omega\zeta) \quad [5 \text{ P}]. \quad (6)$$

Die Krümmung berechnet sich zu

$$\kappa(s) = |d\mathbf{t}/ds| = R\omega^2\zeta^2 \quad [5 \text{ P}] \quad (7)$$

und für die Torsion findet man

$$\tau(s) = |d\mathbf{b}/ds| = c\omega\zeta^2 \quad [5 \text{ P}]. \quad (8)$$

- (d) Die Kurve beschreibt eine Schraubenlinie, die sich entlang der z -Achse mit konstanter Geschwindigkeit c bewegt.

Die Krümmung κ ist ein Maß für die Änderung der Richtung der Tangente der Kurve, also der Änderung der Geschwindigkeitsrichtung. Das Inverse der Krümmung $\kappa = 1/r_0$ bezeichnet man auch als Krümmungsradius wobei $r_0(s)$ der Radius des Kreises ist, der sich an die Kurve am Punkt $s(t)$ anschmiegt.

Die Torsion τ ist ein Maß dafür wie sich die Bahnkurve aus der Ebene aufgespannt von $\mathbf{t}$ und $\mathbf{n}$ herausdreht. Für eine Kurve, die sich in einer festen Ebene bewegt, findet man $\tau = 0$.

2. Beschleunigte Bewegung

(15 Punkte)

Die Geschwindigkeit erhält man durch einmalige Integration der Beschleunigung nach der Zeit

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(0) + \int_0^t dt' \ddot{\mathbf{r}}(t') = [2 + \frac{1}{3} \sin(3t), 2t + \frac{5}{4}t^4, 1], \quad [8 \text{ P}] \quad (9)$$

Die Ortstrajektorie erhält man durch eine weitere Integration der Geschwindigkeit nach der Zeit, unter Berücksichtigung der Anfangskoordinate

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t dt' \dot{\mathbf{r}}(t') = \left[\frac{1}{9} + 2t - \frac{1}{9} \cos(3t), 1 + t^2 + \frac{1}{4}t^5, 2 + t \right] \quad [7 \text{ P}]. \quad (10)$$

3. Schiefer Wurf

(20 Punkte)

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -g, \quad (11)$$

mit Gravitationskonstante $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Integriert man diese Gleichungen erhält man die Trajektorie $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$ als

$$x(t) = \dot{x}(0)t \qquad y(t) = -gt^2/2 + \dot{y}(0)t + h. \quad (12)$$

wobei wir die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $y(0) = h$ verwenden und die Anfangsgeschwindigkeiten entlang x und y schreiben als $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$, und $\dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha$ verwenden. Der Winkel α liegt zwischen der Horizontalen und der Wurfrichtung. Aus der Bedingung dass der Kiesel den Anstoßmittelpunkt trifft erhalten wir

$$x(t_0) = a \qquad y(t_0) = 0. \quad (13)$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich somit eine Gesamtflugzeit $t_0 = a/\dot{x}(0)$, während die zweite einen Zusammenhang zwischen dem Winkel α und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 liefert:

$$v_0^{-2} = 2[\sin(\alpha) \cos(\alpha) + (h/a) \cos^2(\alpha)]/ga. \quad (14)$$

Bei zu kleinen Geschwindigkeiten kann der Anstoßpunkt nicht erreicht werden. Bei zu hohen Geschwindigkeiten gibt es mindestens zwei Lösungen (mehr als zwei ergeben sich z.B. wenn man Umrundungen der Erdkugel mitberücksichtigt). Obige Gleichung lässt eine minimale Lösung zu wenn $v_0(\alpha)$ extremal wird, d.h. $dv_0^{-2}/d\alpha = 0$. Wir finden

$$2[\cos(2\alpha) - (h/a) \sin(2\alpha)]/ga = 0. \quad (15)$$

Auflösen nach α und Einsetzen der Zahlenwerte ergibt schließlich

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan(a/h) \approx 0.712 \approx 40.7^\circ \quad \text{und} \quad v_0 = a \sqrt{\frac{g}{h + (h^2 + a^2)^{1/2}}} \approx 58 \text{ m/s}. \quad (16)$$

(★) *Denkanstoss* Der Winkel ergibt sich aus dem Verhältnis h/a , bleibt α konstant wenn $a \rightarrow 2a$ und $h \rightarrow 2h$. Die Wurfgeschwindigkeit muss jedoch um einen Faktor $\sqrt{2}$ grösser werden, siehe Gl. (14).

4. Flussübersetzung

(15 Punkte)

Da keine Kräfte auf das Boot, lautet die Bewegungsgleichung für $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$

$$\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(0)t + \mathbf{r}(0) \quad (17)$$

mit Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{x}(0) = u_x - v \sin \alpha$ und $\dot{y}(0) = v \cos \alpha$. Hier bezeichnet $u_x = |\mathbf{u}|$ die Fließgeschwindigkeit des Flusses und α den Winkel zwischen der Senkrechten zum Ufer und der Steuerrichtung des Bootes $\mathbf{v}$. Das Boot fährt entlang der y -Achse und steuert gegen die Fließrichtung an. Die Bedingung dass das Boot

das andere Ufer am genau gegenüberliegenden Punkt erreicht lässt sich schreiben als $\mathbf{r}(t_0) = (0, d)$ mit Flußbreite $d = 40\text{m}$. Daraus finden wir den Winkel

$$\alpha = \arcsin(u_x/v) \approx 0.73 \approx 42^\circ \quad [8 \text{ P}] \quad (18)$$

und die Dauer der Überfahrt

$$t_0 = \frac{d}{v \cos \alpha} = 9 \text{ s.} \quad [7 \text{ P}] \quad (19)$$